Prof. Dr. Guido Sweers **WS 2016/2017**
Jan Gerdung

Analysis 1

Übungsblatt 0

Dieses Übungsblatt ist unbepunktet, muss nicht abgegeben werden und wird in der zweiten Vorlesungswoche besprochen.

Aufgabe 1. Seien A, B, C beliebige Aussagen. Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr?

(a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \big((\neg B) \Rightarrow (\neg A)\big)$

(b) $\big(\neg(A \Rightarrow B)\big) \Leftrightarrow \big((\neg A) \Rightarrow (\neg B)\big)$

(c) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \big(A \vee B\big)$

(d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \big((\neg A) \vee B\big)$

(e) $(A \vee B) \Rightarrow (A \Leftrightarrow (\neg B))$

(f) $\big((A \Rightarrow (\neg B)) \Rightarrow A\big) \Leftrightarrow (\neg A)$

(g) $\Big(A \vee (B \wedge C)\Big) \Leftrightarrow \Big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\Big)$

(h) $\big(A \wedge (B \vee C)\big) \Leftrightarrow \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big)$

Aufgabe 2. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) $\sqrt[3]{\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{8}}} > \sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{8}}{2-\sqrt{3}}}$

(b) $5^1 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{31} = \frac{5}{4} \cdot (5^{31} - 1)$

(c) $\dfrac{\frac{1}{2^{2016}+\pi} - \frac{1}{2^{2016}-\pi}}{\frac{1}{2^{2015}-\pi} - \frac{1}{2^{2015}+\pi}} < \dfrac{\frac{1}{2^{2017}+\pi} - \frac{1}{2^{2017}-\pi}}{\frac{1}{2^{2016}-\pi} - \frac{1}{2^{2016}+\pi}}$

Aufgabe 3. Überprüfen Sie die einzelnen Rechenschritte auf ihren Wahrheitsgehalt:

(a) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{lll}
 & a = b + c & | \cdot (a-b) \\
\Rightarrow & a^2 - ab = ba + ca - b^2 - cb & | - ac \\
\Rightarrow & a \cdot (a-b-c) = b \cdot (a-b-c) & | : (a-b-c) \\
\Rightarrow & a = b &
\end{array}
$$

(b) Sei $a > b > 0$. Dann gilt:

$$
\begin{array}{lll}
 & a > b & \\
\Rightarrow & a - b > 0 & |(\cdot)^2 \\
\Rightarrow & a^2 - 2ab + b^2 > 0 & | + ab - a^2 \\
\Rightarrow & b^2 - ab > ab - a^2 & \\
\Rightarrow & b \cdot (b-a) > a \cdot (b-a) & | : (b-a) \\
\Rightarrow & b > a &
\end{array}
$$

Aufgabe 4. Beweisen Sie die De Morganschen Regeln:

(a) Für beliebige Aussagen A, B gilt

$$(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$
$$(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)\,.$$

(b) Für beliebige Mengen $X, Y \subset M$ gilt

$$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$$
$$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c,$$

wobei das Komplement einer Menge $S \subset M$ als $S^c := M \setminus S$ definiert ist.

(c) Stellen Sie Die De Morganschen Regeln für Mengen anschaulich in einer Skizze dar.

Aufgabe 5. „Auf allen Kontinenten gibt es ein Land, in dem es in jeder Stadt eine Straße gibt, in der in allen Wohnungen Menschen mit Haustieren wohnen.“

Formulieren Sie diese Aussage mit Hilfe von Quantoren und verneinen Sie diese Aussage. Verzichten Sie insbesondere auf Ausdrücke wie „ist falsch“, „gilt nicht“, „gibt es nicht“ oder ähnliche Terme.

Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie die Negation folgender Aussage hin, sie dürfen dabei das Symbol $\neg$ nicht verwenden (auch keine identischen Symbole und Worte):

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{y\in\mathbb{R}} \;:\; (|x-y|<\delta) \implies (|f(x)-f(y)|<\varepsilon)$$

Aufgabe 7. Seien $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und $D = \{3, 5, 6, 9, 10\}$. Geben Sie die folgenden Mengen explizit an, d.h. in der Form $\{a, b, \ldots\}$:

(a) $A \setminus D$

(b) $A \cup B$

(c) $A \cup (C \setminus D)$

(d) $(A \cup C) \setminus D$

(e) $(B \setminus D) \setminus (A \cup C)$

(f) $(B \cup C) \setminus B$

(g) $(B \cap C) \setminus A$

(h) $D \cup (B \cup (A \cap C))$

(i) $(D \setminus C) \cup (B \cup (A \cap C))$

Aufgabe 8. Sei $M := \{S \text{ ist eine Menge} \mid S \notin S\}$ die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.

(a) Untersuchen Sie, ob $M \in M$ gilt.

(b) Untersuchen Sie, ob $M \notin M$ gilt.

(c) Was kann daraus gefolgert werden?

Bemerkung. Dieses Problem ist als Russellsche Antinomie bekannt. Russell veranschaulichte diese durch das sogenannte Barbier-Paradoxon:

> *Ein Barbier rasiere alle Personen, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert sich der Barbier?*

Veranstaltungshomepage: http://www.mi.uni-koeln.de:8914