Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung

WS 2016/2017

Analysis 1

Übungsblatt 1

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 27.10.2016, um 12 Uhr.

Bemerkung: Seien A, B zwei beliebige Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion.
Für $X \subset A$ ist das *Bild* von X unter f definiert als $f(X) := \{f(x)\,;\, x \in X\}$.
Für $Y \subset B$ ist das *Urbild* von Y unter f definiert als $f^{-1}(Y) := \{x \in A\,;\, f(x) \in Y\}$.

Aufgabe 1: Sind die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv, bijektiv (d.h. sowohl injektiv, als auch surjektiv)? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = |x|$

(b) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = -2x$

(c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^3$

(d) $f : [-1, 2] \to [-1, 8]$, $f(x) = x^3$

(e) $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ 1 - x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

(f) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Z} \\ 1 - x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

Aufgabe 2 (6 Punkte): Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) f ist injektiv genau dann, wenn $\forall_{X \subset A} : f^{-1}(f(X)) = X$.

(b) f ist surjektiv genau dann, wenn $\forall_{Y \subset B} : f\left(f^{-1}(Y)\right) = Y$.

(c) f ist injektiv genau dann, wenn $\forall_{X,Y \subset A} : f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Aufgabe 3: Finden Sie Funktionen $f : B \to C$ und $g : A \to B$, so dass f injektiv, g surjektiv und $f \circ g$ weder injektiv, noch surjektiv ist.

Bemerkung: $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1} & \text{, falls } x \neq 1 \\ n + 1 & \text{, falls } x = 1\,. \end{cases}$$

Aufgabe 5: Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt: $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{l=0}^{n} l \cdot (l - 1) = \frac{1}{3}(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$.

Aufgabe 6 (3 Punkte): Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$n \cdot (n+1) \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) = 3m\,.$$

Aufgabe 7: Zeigen Sie jeweils, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

(a) $3^{2n+3} - 2^{2n+1} = 5m$,

(b) $n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot (3n^2 + 3n - 1) = 30m$.

Aufgabe 8: Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\forall m \in \mathbb{N}$: $m^2 \leq \frac{(m+1)!}{(m-1)!}$,

(b) $\forall m \in \mathbb{N}$: $m^2 \leq m!$,

(c) $\forall m, n \in \mathbb{N}$: $m > n \Longrightarrow m! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!}$,

(d) $\forall m, n \in \mathbb{N}$: $m > n \Longrightarrow (2n)! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!}$.

Aufgabe 9: Seien $x, y > 0$ und $x \cdot y = 1$. Zeigen Sie, dass $x + y \geq 2$ ist. Wann gilt $x + y = 2$?

Aufgabe 10: Zeigen Sie, für welche $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Gleichheiten gelten:

(a) $|x + y| = |x| + |y|$,

(b) $|x - y| = \big|\, |x| - |y| \,\big|$.

Aufgabe 11: Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass folgende Ungleichungen für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten.

(a) $|x + y| \leq |x| + |y|$,

(b) $|x - y| \leq |x| + |y|$,

(c) $|x + y| \geq \big|\, |x| - |y| \,\big|$,

(d) $|x - y| \geq \big|\, |x| - |y| \,\big|$.

Aufgabe 12 (3 Punkte): Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \qquad \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \ .$$

Aufgabe 13 (4 Punkte): Zeigen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{(x+4) \cdot (x+5)}{x^2 + x} > 0\ .$$

Aufgabe 14: Zeigen Sie jeweils, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Ungleichungen gelten:

(a) $x - 10 - \frac{5}{x-6} > 0$,

(b) $|x^2 - 10| > 6$.

Veranstaltungshomepage: http://www.mi.uni-koeln.de:8914