Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung **WS 2016/2017**

Analysis 1

Übungsblatt 10

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 12.01.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (2 Punkte): Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{\sqrt{x - x^2}}{x - \sqrt{x}}$ (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{\exp(x) - \exp(-x)}$

Aufgabe 2 (5 Punkte): Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Wenn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ und $\lim\limits_{y \to b} g(y) = a$, dann gilt $\lim\limits_{y \to b} f(g(y)) = f(a)$.

(b) Wenn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ und $\lim\limits_{y \to b} g(y) = a$, dann gilt $f(g(b)) = f(a)$.

(c) Wenn $\lim\limits_{x \to g(b)} f(x) = f(g(b))$ und $\lim\limits_{y \to b} g(y) = a$, dann gilt $\lim\limits_{y \to b} f(g(y)) = f(a)$.

(d) Wenn $\lim\limits_{x \to g(b)} f(x) = f(g(b))$ und $\lim\limits_{y \to b} g(y) = a$, dann gilt $f(g(b)) = f(a)$.

(e) Wenn $\lim\limits_{x \to g(b)} f(x) = f(g(b))$ und $\lim\limits_{y \to b} g(y) = g(b)$, dann gilt $\lim\limits_{y \to b} f(g(y)) = f(g(b))$.

Aufgabe 3 (3 Punkte): Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass $m, M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$m(x) = \min\{f(x), g(x)\} \qquad M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

stetig sind.

Aufgabe 4: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Falls f und g unstetig in einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ sind, so ist auch $f + g$ unstetig in a.

(b) Falls f und g unstetig in einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ sind, so ist auch fg unstetig in a.

(c) Falls f eine surjektive und monoton steigende Abbildung ist, so ist f stetig auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 5: Überprüfen Sie die folgenden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{x} & \text{falls } |x| < 1\,, \\ x & \text{falls } |x| = 1\,, \\ x\exp(x^2 - 1) & \text{falls } |x| > 1\,. \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x < 0\,, \\ \frac{x - x^2}{\sqrt{x} - x} & \text{falls } 0 < x < 1\,, \\ 2\exp(x-1) & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 6 (2+2 Punkte): Wir definieren:

$$f(z) := \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{z^2}\right) & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,, \\ 0 & \text{für } z = 0\,. \end{cases}$$

(a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}$?

(b) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig in $\{0\}$?

Aufgabe 7: Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -b^2 + ax & \text{falls } x \leq 0\,, \\ \dfrac{ax-b}{ax+b} & \text{falls } 0 < x < 1\,, \\ a\exp(x) - \dfrac{2b}{a+b} & \text{falls } 1 \leq x\,. \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 8: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig in* $a \in I$, wenn

$$\exists \delta > 0, L > 0\, \forall x \,:\, |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < L\,|x - a|\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass Lipschitz-Stetigkeit in a die Stetigkeit in a impliziert.

(b) Zeigen Sie, dass $f(x) = \sqrt{x}$ in 0 nicht Lipschitz-stetig ist. Begründen Sie damit, dass aus Stetigkeit nicht die Lipschitz-Stetigkeit folgt.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ auf $\mathbb{R}^+$ Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 9 (3+3 Punkte): Berechnen Sie alle Asymptoten bei:

(a) $f(x) = \exp\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

(b) $g(x) = \dfrac{x(x+1)}{\exp(x) - 1 - x}$

Aufgabe 10: Hat $\dfrac{x^2\sqrt[3]{x}+1}{x^2+2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Asymptote?

Aufgabe 11: Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit $a_0 \neq 0$ und Potenzradius $R_f > 0$. Sei weiter $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ durch

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{a_0} & \text{falls } n = 0\,, \\ -\frac{1}{a_0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{n-k} b_k & \text{falls } n \geq 1\,, \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie:

(a) Es existiert ein $r > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| \leq |a_0|\, r^n$.

(b) Die Potenzreihe g besitzt einen positiven Konvergenzradius $R_g > 0$.
Hinweis: Zeigen Sie $|b_n| \leq (2r)^n / |a_0|$ mit dem r aus Teil (a).

(c) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min\{R_g, R_f\}$ gilt: $f(z)g(z) = 1$.