Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung **WS 2016/2017**

Analysis 1

Übungsblatt 11

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 19.01.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und f habe die zwei horizontalen Asymptoten $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_1 \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = l_2$$

Zeigen Sie, dass f beschränkt ist.

Aufgabe 2 (0+2+2 Punkte): Beweisen oder wiederlegen Sie:

(a) $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig, wenn $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f) : [-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig sind.

(b) Wenn $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist mit $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$, dann gibt es $x_0 \in (-1,1)$ mit $f(x_0) = 0$.

(c) Wenn $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist mit $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$, dann gibt es $x_0 \in (-1,1)$ mit $\mathrm{Re}(f)(x_0) = \mathrm{Im}(f)(x_0)$.

Aufgabe 3: Sei $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Ist f differenzierbar in 0?

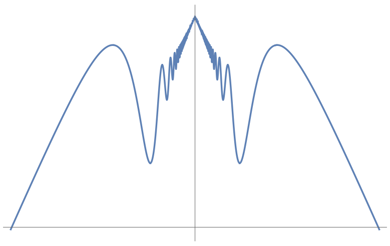
Aufgabe 4: Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die jeweilige Funktion differenzierbar?

(a) $f(x) = x\,|x-1|$

(b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$

Aufgabe 5 (2+2 Punkte): Wir betrachten die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{falls } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{falls } x = 0\,. \end{cases}$$



(a) Berechnen Sie wenn möglich die linke und die rechte Ableitung in 0.

(b) Berechnen Sie wenn möglich $\lim_{x\uparrow 0} f'(x)$ und $\lim_{x\downarrow 0} f'(x)$.

Aufgabe 6 (4 Punkte): Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gelte $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass dann für alle $x_1, x_2 \in (a,b)$ gilt:

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) < f(x_2)\,.$$

Aufgabe 7: Seien $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Definiere $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) = \min(f(x), g(x)).$$

Sei $a \in (0,1)$. Beweisen Sie:

(a) Wenn $f(a) \neq g(a)$, dann ist h differenzierbar in a.

(b) Wenn $f(a) = g(a)$ und $f'(a) = g'(a)$, dann ist h differenzierbar in a.

(c) Wenn $f(a) = g(a)$ und $f'(a) \neq g'(a)$, dann ist h rechts-differenzierbar in a.

Definition: *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, wenn f ist differenzierbar in (a,b) und es eine stetige Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $g(x) = f'(x)$ für $x \in (a,b)$.*

Aufgabe 8: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$, stetig differenzierbar und so, dass $f(a) = f(b)$. Zeigen Sie, dass $x \in (a,b)$ existiert mit $f'(x) = 0$.

Aufgabe 9: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$, differenzierbar in (a,b) und so, dass $f(a) = f(b)$. Zeigen Sie, dass $x \in (a,b)$ existiert mit $f'(x) = 0$.

Aufgabe 10: Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Jede stetig differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ erfüllt die Lipschitz-Bedingung auf $[a,b]$.

(b) Jede differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ erfüllt die Lipschitz-Bedingung auf $[a,b]$.

(c) Jede Lipschitz-stetige Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.

Aufgabe 11 (2+2+0+0 Punkte): Seien $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Beschreiben Sie die folgenden Funktionen nur mit f, g und h, und Ableitungen von f, g und h.

(a) $(fgh)'(x) = \ldots$

(b) $((f \circ g) \circ h)'(x) = \ldots$

(c) $\big((f+g)' \circ h\big)'(x) = \ldots$

(d) $(f \circ g)'''(x) = \ldots$

Bemerkung: $(fgh)(x) = f(x)\,g(x)\,h(x)$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ *und* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Aufgabe 12: Sei I ein offenes Intervall und f, g seien n mal differenzierbar auf I. Zeigen Sie, dass in I für die n-te Ableitung gilt:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Aufgabe 13 (2+2 Punkte): (a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in 0 differenzierbar und für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelte $f(x+y) = f(x)f(y)$. Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass exp in $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.