Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung

WS 2016/2017

Analysis 1

Übungsblatt 12

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 26.01.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Wahr oder nicht wahr?

(a) Wenn $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton sind, dann ist $f + g$ monoton.

(b) Wenn $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton sind, dann ist $f \circ g$ monoton.

(c) Wenn $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex sind, dann ist $f + g$ konvex.

(d) Wenn $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex sind, dann ist $f \circ g$ konvex.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2: Wahr oder nicht wahr?

(a) $\sinh(iz) = i \sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) $\cosh(iz) = \cos(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(c) $x = -\arcsin(i \sinh(ix))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) $x = -\text{arcsinh}(i \sin(ix))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 3: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x) = \arctan(x) + e^x$$

und hat eine Inverse $f^{\text{inv}} : A \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie $A \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte): Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$g(x) = x(1-x)^2 + e^x.$$

(a) Zeigen Sie:

(i) $g'(x) \geq 3x^2 + e^x > 0$ für alle $x \leq \frac{1}{4}$;

(ii) $g'(x) \geq 3x(x-1) + e^x \geq -\frac{3}{4} + e^x > 0$ für alle $x \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$;

(iii) $g'(x) \geq e^x > 0$ für alle $x \geq 1$.

(b) Zeigen Sie, dass g eine differenzierbare Inverse $g^{\text{inv}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat.

Aufgabe 5: Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \sinh(x) - \sin(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine Inverse $f^{\text{inv}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat.

(b) Ist diese Inverse differenzierbar auf $\mathbb{R}$?

(c) Ist die Funktion $x \mapsto \left(f^{\text{Inv}}(x)\right)^3$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$?
Hinweis: betrachten Sie die Ableitung von $x \mapsto f(\sqrt[3]{x})$ in 0 mit Hilfe der Potenzreihendarstellung.

Aufgabe 6 (3 Punkte): Welche der Potenzreihen

(a) $\displaystyle \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (2n+1)(n!)^2} x^{2n+1}$ (b) $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n}$ (c) $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (2n+1)(n!)^2} x^{2n+1}$

stimmt für $x \in (-1, 1)$ mit welcher der Funktionen

(i) $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\arcsin(x)$ (iii) $\arccos(x)$

überein?

Aufgabe 7: Welche bekannte Funktion hat als Potenzreihe bei $x = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (2n+1)(n!)^2} x^{2n+1}?$$

Aufgabe 8 (2+2+2 Punkte): Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos(x)}{x^2}$

(b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi + x^2) - \cos(x) + 1}{\sin(x)^2}$

(c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x) - x}{\operatorname{arsinh}(x)}$

Aufgabe 9 (5 Punkte): Wir betrachten eine 1-parametrige Familie von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}^+$:

$$f(x; t) = \frac{\sin(tx)}{t}.$$

(a) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x;t)$ nach x, das heißt $\frac{d}{dx} \frac{\sin(tx)}{t}$.

(b) Berechnen Sie $f_0(x) := \lim_{t \downarrow 0} f(x;t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Ist f_0 differenzierbar auf $\mathbb{R}$? Gilt $\frac{d}{dx} f_0(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{d}{dx} f(x;t)$?

(d) Berechnen Sie $f_*(x) := \lim_{t \to \infty} f(x;t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(e) Ist f_* differenzierbar auf $\mathbb{R}$? Gilt $\frac{d}{dx} f_*(x) = \lim_{t \to \infty} \frac{d}{dx} f(x;t)$?