Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung

WS 2016/2017

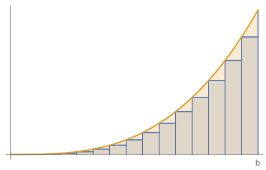
Analysis 1

Übungsblatt 13

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 02.02.2017, um 12 Uhr.

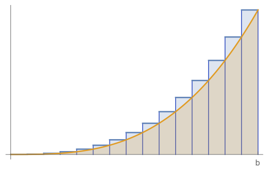
Aufgabe 1: Berechnen Sie $\int_0^4 \min\left(x, 1, (3-x)^3\right) dx$ ohne Stammfunktionen zu verwenden.

Aufgabe 2 (8 Punkte): (a) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2\left(n+1\right)^2$.



(b) Begründen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b}{n}\left(\frac{k}{n}b\right)^3 \leq \int_0^b x^3 dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{k}{n}b\right)^3.$$



(c) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{k}{n}b\right)^3.$$

(d) Begründen Sie ohne Stammfunktion, dass für $0 \leq a \leq b < \infty$ gilt

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4.$$

Aufgabe 3: Es gibt Konstanten $a_0, \ldots, a_{14} \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} k^{13} = a_{14}n^{14} + a_{13}n^{13} + \ldots + a_0\,.$$

Bestimmen Sie a_{14}. *Hinweis:* $\int_0^n x^{13} dx \leq \sum_{k=1}^{n} k^{13} \leq \int_1^{n+1} x^{13} dx$.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Sei $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ die inverse Funktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + e^x$. Berechnen Sie

$$\int_1^{1+e} g(x)\, dx.$$

Hinweis: Skizzieren Sie beim Graphen von $y = f(x)$ die Oberflächen von $\int_0^1 f(x)\, dx$ und $\int_1^{1+e} g(y)\, dy$.

Aufgabe 5 (4 Punkte): Betrachte:

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \left[\frac{1}{x}\right] \text{ gerade} \\ -1 & \text{für } \left[\frac{1}{x}\right] \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Ist diese Funktion Riemann-integrierbar auf $[0, 2]$?

- Wenn nein, begründen Sie dies und berechnen Sie $\displaystyle\int_{\frac{1}{10}}^{2} f_0(x)\, dx$.
- Wenn ja, begründen Sie dies und berechnen Sie $\displaystyle\int_{0}^{2} f_0(x)\, dx$.

Aufgabe 6: (a) Zeigen Sie, durch Vergleich der Flächeninhalte, dass

$$\int_0^\pi (\cos(x))^2\, dx = \int_0^\pi \left(1 - \cos(x)^2\right) dx.$$

Hinweis: $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.

(b) Berechnen Sie, ohne Stammfunktionen zu verwenden

$$\int_0^\pi (\cos(x))^2\, dx.$$

Aufgabe 7: Sei $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$ eine Potenzreihe um a, welche für alle $x \in (a-R, a+R)$ absolut konvergiere. Zeigen Sie, dass P Riemann-integrierbar auf $[c, d] \subset (a-R, a+R)$ ist und geben Sie eine Stammfunktion an.

Aufgabe 8 (2+2 Punkte): Bestimme $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ für

(a) $f(t) = \dfrac{t^2+1}{t+1}$

(b) $f(t) = \dfrac{3t^3 + 4t^2 - 4t + 1}{t+2}$.

Aufgabe 9: Bestimmen Sie alle Stammfunktionen von f:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ für $x > \frac{b}{a}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in (-1, 1)$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ für $x \in (-1, 1)$

(d) $f(x) = \tan(x)$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Aufgabe 10: Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^\pi e^{ix} dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} e^{ix} dx$