Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung **WS 2016/2017**

Analysis 1

Übungsblatt 2

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 03.11.2016, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$|x+y| + |x-y| \geq |x| + |y| \;.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte): Sei $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ mit $b, d > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \;.$$

Aufgabe 3 (2 Punkte): Sei n die dritte Ziffer Ihrer Matrikelnummer. Skizzieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche durch $f(x) = \max\{-1, \min\{x, n+1-x\}\}$ definiert ist.

Aufgabe 4: Beweisen Sie, dass folgende Aussagen für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gelten:

(a) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für $1 \leq k$,

(b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Aufgabe 5: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \;.$$

Aufgabe 6 (5 Punkte): Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ durch

$$f(x) = \frac{5x^2+3}{6x} \;.$$

Wir betrachten die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = f(a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $1 \leq x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ und dass für alle $x \in [1, \sqrt{3}]$ gilt $f(x) \in [1, \sqrt{3}]$.

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $a_n \in [1, \sqrt{3}]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7: Wir definieren $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 3$. Beweisen Sie, dass

(a) $f_{m+n} = f_{n+1} f_m + f_n f_{m-1}$ für $n \geq 1$ und $m \geq 2$,

(b) $f_{2n} = f_n(f_{n+1} + f_{n-1})$ für $n \geq 2$,

(c) $f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$ für $n \geq 1$.

Aufgabe 8 (6 Punkte): Sei $a_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$ für $n \in \mathbb{N}^+$, wobei f_n wie in der letzten Aufgabe definiert sei. Beweisen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $a_n \in [1, 2]$.

(b) Wir nehmen an, dass a_n gegen einen Grenzwert a konvergiert. Bestimmen Sie unter dieser Annahme den Grenzwert a.

(c) Zeigen Sie, dass folgende Formel gilt:

$$f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}\,.$$

Aufgabe 9: Überprüfen Sie jeweils, welche der Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität für die jeweilige Relation auf den vorgegebenen Mengen erfüllt sind:

(a) Die Menge der Menschen und die biologische Verwandtschaft als Relation zwischen zwei Menschen.

(b) Die Menge $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y$, falls $x^2 \leq y^2$.

(c) Die Menge $\mathbb{Z}$ mit $x \sim y$, falls $x < y$.

(d) Die Menge $\{a, b, c, d\}$ mit $x \sim y$, falls $(x, y) \in \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (d, c)\}$.

Aufgabe 10 (4 Punkte): Sei $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $(x, y) \prec (\tilde{x}, \tilde{y})$ definiert durch

$$\max\{x - \tilde{x}, (y - \tilde{y})^3\} \leq 0\,.$$

Zeigen Sie, dass dies $(M, \prec)$ geordnet, aber nicht total geordnet ist.

Aufgabe 11: Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

Aufgabe 12: Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ ist, indem Sie eine beschränkte monoton wachsende Folge in $\mathbb{Q}$ finden, die $\frac{1}{x}$ als Grenzwert hat.

Man hat uns gebeten folgenden Text aufzunehmen: