Prof. Dr. Guido Sweers **WS 2016/2017**
Jan Gerdung

Analysis 1

Übungsblatt 3

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 10.11.2016, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: (a) Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar viele abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass

$$B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$$

abzählbar ist.

(b) Benutzen Sie (a) und dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, um zu zeigen, dass jedes Intervall (a, b) mit $a < b$ überabzählbar ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

- $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k\ :\ x_n \geq \sup\{x_m\,;\, m > n\}$ oder
- $\exists\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq\ k\ :\ x_n < \sup\{x_m\,;\, m > n\}$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Folge reeller Zahlen eine monotone Teilfolge besitzt.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Zeigen Sie, dass jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ eine beschränkte monotone Teilfolge besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4 (3 Punkte): Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen: $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$. Zeigen Sie, dass für jede Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \ell.$$

Aufgabe 5: Begründen Sie:

(a) $\left\{\frac{2n+1}{2m+1}; n, m \in \mathbb{Z}\right\}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{C}$.

(c) $\{r\,(\cos(t) + i \sin(t))\,; r \in \mathbb{Q}^+$ und $t \in \mathbb{R}\}$ liegt dicht in $\mathbb{C}$.

(d) $\{r\,(\cos(t) + i \sin(t))\,; r \in \mathbb{Q}^+$ und $t \in \mathbb{Q}\}$ liegt dicht in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 6: Die folgenden Additionstheoreme gelten:

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y),$$
$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y).$$

Nutzen Sie diese Additionstheoreme und $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ für die folgenden Aufgaben.

(a) Zeigen Sie $(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{1}}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) Berechnen Sie $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ und $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Aufgabe 7: Schreiben Sie die folgenden komplexen Ausdrücke in der Form $a + ib$ auf, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind.

(a) $(3 + 4i)^3$

(b) $\dfrac{3 + 2i}{5 - 6i}$

(c) $\overline{7 - 3i} \cdot \overline{2 + i}$

(d) $(2 - 3i) \cdot \overline{3 + 2i}$

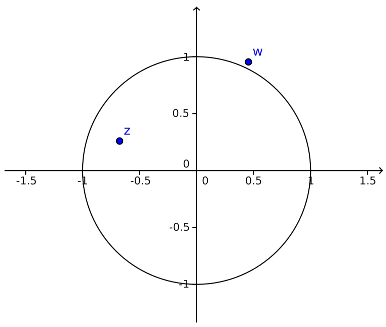
(e) $\overline{|5 + 11i|}$

(f) $\dfrac{(1 + i)^{1000}}{(2\sqrt{3} - 2i)^{251}}$

Aufgabe 8 (5 Punkte): Sei m_k die k-te Ziffer Ihrer Matrikelnummer für $k \in \{1, 3, 5, 7\}$. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{m_1 + i \cdot (m_7 + 1)}{m_5 + 1 - i \cdot (m_3 + 3)} = a + i \cdot b\,.$$

Aufgabe 9: Sie sehen z und w in der Zeichnung. Zeichnen Sie auch die folgenden komplexen Zahlen ein:



(a) z^2

(b) $\frac{1}{w}$

(c) zw

(d) $\frac{w}{z}$

(e) $|z|$

(f) $\overline{w}$

Aufgabe 10 (3 Punkte): Sei $k \in \mathbb{N}^+$. Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^k = 1.$$

Aufgabe 11: Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a) $z^3 = -i$

(b) $z^4 = -1$

(c) $z^3 = 1 - i$