Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung **WS 2016/2017**

Analysis 1

Übungsblatt 4

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 17.11.2016, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Bei Computeralgebrasystemen sieht man häufiger Ausdrücke wie $\sqrt{-1}$ und manchmal liest man $\sqrt{-1} = i$. Was ist an folgender Rechnung falsch?

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Aufgabe 2: Wir definieren $w \leq_{\mathbb{C}} z$ durch $\mathrm{Re}(w) \leq \mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(w) \leq \mathrm{Im}(z)$.

(a) Ist $\leq_{\mathbb{C}}$ eine Ordnung auf $\mathbb{C}$?

(b) Ist $\leq_{\mathbb{C}}$ eine totale Ordnung auf $\mathbb{C}$?

(c) Gilt für $0 \leq_{\mathbb{C}} z$ und $u \leq_{\mathbb{C}} v$, dass $zu \leq_{\mathbb{C}} zv$?

Selbstverständlich müssen Sie Ihre Antworten begründen.

Aufgabe 3: Beweisen Sie, dass für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z-w|^2 + |z+w|^2 = 2\,|z|^2 + 2\,|w|^2\,.$$

Erklären Sie, wieso man dies Parallelogrammgleichung nennt.

Aufgabe 4: Berechnen Sie alle Nullstellen der folgenden Polynome.

(a) $z^2 - (4+2i)\cdot z - 2 - 8i$

(b) $z^4 - (1+2i)\cdot z^2 - 1 + i$

Aufgabe 5 (2+2 Punkte): (a) Zwei Nullstellen des Polynoms

$$2z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 8z - 16.$$

sind $z_1 = 1$ und $z_2 = -2$. Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen des Polynoms.

(b) Zwei Nullstellen des Polynoms

$$z^4 - (4+2i)z^3 + (9+8i)z^2 - (14+14i)z + 12 + 6i$$

sind $z_1 = 3i$ und $z_2 = 2 + i$. Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen des Polynoms.

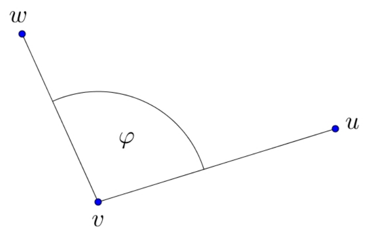
Aufgabe 6: Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $a_i \in \mathbb{C}$ mit $|a_i| < 1$. Sei

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Zeigen Sie, dass alle Lösungen von $P(z) = 0$ innerhalb des Kreises $|z| = n$ liegen.

Aufgabe 7 (2+2 Punkte): Seien u, v, w drei verschiedene komplexe Zahlen.

(a) Es sei $\varphi \in [0, 2\pi)$ der Winkel, den man erhält, wenn man u, v und w in der Gaußebene einzeichnet und die Verbindungsstrecke von v nach u als ersten Schenkel und die von v nach w als zweiten Schenkel wählt (s. Skizze). Zeigen Sie, dass gilt:



$$\varphi = \operatorname{Arg}\left(\frac{w-v}{u-v}\right).$$

(b) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha \neq 0$ und sei $f(z) = \alpha z + \beta$. Zeigen Sie, dass f die Winkel erhält, dass also für alle $u, v, w \in \mathbb{C}$ mit $u \neq v \neq w$ gilt:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{w-v}{u-v}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{f(w)-f(v)}{f(u)-f(v)}\right).$$

Aufgabe 8 (2+2+2 Punkte): Skizzieren Sie mit Begründung die Mengen:

(a) $\{\, z \in \mathbb{C} \;;\; |z - 4i + 2| = 2 \,\}$

(b) $\{\, z \in \mathbb{C} \;;\; \operatorname{Re}(z) = |z - 3 - 2i| \,\}$

(c) $\left\{\, z \in \mathbb{C} \;;\; \operatorname{Arg}\left(\frac{z+i}{z-3-3i}\right) = \frac{\pi}{2} \,\right\}$

Aufgabe 9 (2+2+2 Punkte): Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(r) = \dfrac{2r}{r^2+1} + i \cdot \dfrac{r^2-1}{r^2+1}$.

(a) Zeigen Sie, dass $f(\mathbb{R}) \subset K := \{\, \cos(t) + i\sin(t) \;;\; t \in \mathbb{R} \,\}$.

(b) Ist $f : \mathbb{R} \to K$ surjektiv bzw. injektiv?

(c) Berechnen Sie $f^{-1}(\{a\})$ für $a \in f(\mathbb{R})$.

Aufgabe 10: Berechnen Sie $f(\mathbb{C})$ für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \dfrac{|z|}{z} + \dfrac{|z|}{\overline{z}}$.

Aufgabe 11: Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\dfrac{1}{|z|} < \dfrac{1}{|z+2i|}$?

Mit Gleichstellungsmitteln ist es uns möglich eine extra Übungsgruppe anzubieten. Diese Übungsgruppe ist nur für Frauen zugänglich und wird dienstags von 10:00 bis 11:30 Uhr im Seminarraum 1 des mathematischen Instituts stattfinden. Die Übungsgruppe findet das erste Mal am 15.11.2016 statt. Wenn Sie in diese Übungsgruppe wechseln möchten, melden sich bitte per E-Mail bei Herrn Gerdung (`jgerdung@math.uni-koeln.de`).