Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung **WS 2016/2017**

Analysis 1

Übungsblatt 5

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 24.11.2016, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Berechnen Sie $f(K)$ für

(a) $K = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z-1| = 1\}$ und $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$,

(b) $K = \{\, z \in \mathbb{C} \; ; \; |z-2i| = 1 \,\} \setminus \{i\}$ und $f(z) = \frac{1}{z-i}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Sei $\varepsilon > 0$, berechnen Sie ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > N_\varepsilon \; : \; \left| \frac{2n^2 - 2}{n^2 + 3} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Aufgabe 3 (1+1+1+1 Punkte): Wir definieren die Folgen

(a) $a_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{4} n\pi\right)}{n+2}$,

(b) $b_n = \sin\left(\frac{1}{4} n\pi\right) + \frac{n+5}{n}$,

(c) $c_n = n + (-2)^n$,

(d) $d_n = \frac{n+5}{n} - \sin\left(\frac{n+2}{n+1}\pi\right)$.

Bestimmen Sie jeweils

- Hat die Folge eine monoton wachsende Teilfolge?
- Hat die Folge eine monoton fallende Teilfolge?
- Ist die Folge konvergent?
- Ist die Folge eine Cauchy-Folge?

Auch hier müssen Sie Ihre Antworten begründen.

Aufgabe 4: Sei $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv und $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

(a) Ist $\{a_{p(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?

(b) Zeigen Sie, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $\{a_{p(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte): Seien $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ reelle Folgen. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Argumentieren Sie.

(a) Wenn a_n und b_n konvergieren, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)^2$.

(b) Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann, wenn die Teilfolgen $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergieren.

(c) Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann, wenn die Teilfolgen $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{3n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergieren.

Aufgabe 6: Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ und $\tilde{A} := \{ -a \ ; \ a \in A \}$. Wahr oder nicht wahr?

(a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$,

(b) $\sup(A \cap B) = \min(\sup(A), \sup(B))$,

(c) $\sup(\tilde{A}) = -\inf(A)$.

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wahr oder nicht wahr?

(d) $\sup\{f(x) + g(x) \, ; x \in \mathbb{R}\} = \sup\{f(x) \, ; x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x) \, ; x \in \mathbb{R}\}$,

(e) $\sup\{f(x) + g(y) \, ; x, y \in \mathbb{R}\} = \sup\{f(x) \, ; x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x) \, ; x \in \mathbb{R}\}$,

Aufgabe 7: (a) Bestimmen Sie Limes Superior und Limes Inferior von der Folge

$$a_n = \frac{4 - (-1)^n}{5 + 2^{-n}}.$$

(b) Sei $x \in \mathbb{Q}$ gegeben. Betrachten Sie die Folge $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$,

$$b_n = \cos(xn\pi).$$

Für welche $x \in \mathbb{Q}$ ist der Limes Superior gleich 1? Für welche $x \in \mathbb{Q}$ ist der Limes Inferior gleich -1?

Aufgabe 8 (2+2+2 Punkte): Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Gilt

$$\limsup_{x\to\infty}(f(x) + g(x)) \leq \limsup_{x\to\infty} f(x) + \limsup_{x\to\infty} g(x)$$

(a) für beschränkte Funktionen: $f, g : \mathbb{R} \to [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$?

(b) für positive Funktionen: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$?

(c) für beliebige Funktionen: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?