Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung **WS 2016/2017**

Analysis 1

Übungsblatt 6

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 01.12.2016, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt

$$n^n < (2n)! \ \leq \left(n^2 + n\right)^n .$$

Aufgabe 2 (3 Punkte): Geben Sie ein minimales $N \in \mathbb{N}$ derart an, dass

$$n! > (n + 10)\, 2^n \text{ für alle } n \geq N$$

gilt und beweisen Sie diese Ungleichung mit Ihrem N.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Zeigen Sie, dass die Folgen konvergieren und bestimmen Sie den Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{3n^3 + 2n - 4}{n^3 + 6n^2 + 2}$

(b) $b_n = \dfrac{3 \cdot 2^n + 2n^3}{\sqrt{4^n + 3^n + 2n^2}}$

(c) $c_n = \dfrac{(n+1)!}{n^n}$

(d) $d_{n+1} = \sqrt{2 + d_n}$ mit $d_0 = 1$

(e) $e_{n+1} = \dfrac{21}{4 + e_n}$ mit $e_0 = 2$

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die Folgen konvergieren und bestimmen Sie den Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{2n^2 - 6n}{3n^3 + 1}$

(b) $b_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}\sqrt{2n^3+3}}{\sqrt{5n^5 - 3n^4 + 1}}$

(c) $c_n = \sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

Aufgabe 5: Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Folgen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $a_{n+1} = (a_n + 1)(a_n - 1)$ mit $a_0 = 2$

(b) $b_{n+1} = (b_n + 1)(b_n - 1)$ mit $b_0 = \frac{1}{2}$

Aufgabe 6: Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Folge $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton wachsend und die Folge $b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist monoton fallend.

(b) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(c) Es gilt

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^n}{n!}$$

und

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^4 \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n} = \frac{n^n}{(n-1)!}$$

(d) Sei $\ell := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Zeigen Sie

$$\ell \left(\frac{n}{\ell}\right)^n \leq n! \leq \ell n \left(\frac{n}{\ell}\right)^n$$

Aufgabe 7 (5 Punkte): Sei a_n eine reelle Folge. Beweisen Sie: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a\,.$$

Gilt auch die Umkehrung der Aussage?

Aufgabe 8 (3 Punkte): Beweisen Sie den Satz von Bolzano-Weierstrass für reelle Folgen:

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt einen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 9 (2+2 Punkte): Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folgen:

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n + 2}{3 + (-1)^{n+1}}$

(b) $b_n = \dfrac{(-2)^n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{3 \cdot 2^n + 1}$