Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung

WS 2016/2017

Analysis 1

Übungsblatt 7

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 08.12.2016, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte): Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

(a) Wenn $\{a_n\}$ nicht beschränkt ist, dann hat die Folge auch keinen Häufungswert.

(b) Wenn $\{a_n\}$ nur einen Häufungspunkt hat, dann konvergiert $\{a_n\}$.

(c) Wenn $\{a_n\}$ beschränkt ist und nur einen Häufungspunkt hat, dann konvergiert $\{a_n\}$.

(d) Wenn $\{a_n\}$ beschränkt und divergent ist, so hat $\{a_n\}$ mindestens zwei Häufungspunkte.

Aufgabe 2: Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

(a) Sei $a_n > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = 1$ gilt, dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(b) Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ gilt, dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = 1$.

(c) Falls jedes $x \in (-1, 1) = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 1\}$ ein Häufungspunkt von $\{a_n\}$ ist, so ist auch 1 ein Häufungspunkt der Folge.

Aufgabe 3 (2 Punkte): Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mithilfe von Partialbruchzerlegung in möglichst einfacher Form:

(a) $\dfrac{-3x^2 + x + 8}{(x+2)^2(x-4)}$

(b) $\dfrac{x^4 + 4\,x^3 - 19\,x^2 - 50\,x + 116}{(x+4)(x-2)}$

Aufgabe 4 (3 Punkte): Divergent oder konvergent?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^{3/4}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}$

Aufgabe 5: Divergent oder konvergent?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} i^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$

Aufgabe 6 (3 Punkte): Berechnen Sie

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{4}\right)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{3n} - 7^{2n}}{3^{4n}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{9n^2 - 3n - 2}$

Aufgabe 7: Untersuchen Sie die folgende Reihe.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n + 2(-1)^n}$$

(a) Konvergiert die Reihe absolut?

(b) Gelten die Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums?

(c) Konvergiert die Reihe?

Aufgabe 8: Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen. Geben Sie für jede der folgenden Aussagen einen Beweis an, oder ein Gegenbeispiel.

(a) Wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ absolut konvergiert, dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann gilt $\limsup\limits_{n\to\infty}(n \cdot a_n) \leq 1$.

(c) Wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n}$ konvergiert und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Aufgabe 9 (4 Punkte): Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Nullfolge. Zeigen Sie, dass eine Teilfolge a_{n_k} existiert, so dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ konvergiert.

Aufgabe 10 (4 Punkte): Sei $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. Zeigen Sie, dass die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 2^{-k}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Aufgabe 11: Es sei $\zeta(q) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ für $q > 1$ die Riemannsche Zeta-Funktion. Zeigen Sie die folgende Identität:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^q} = (1 - 2^{-q}) \cdot \zeta(q)\,.$$

Wir wurden gebeten folgenden Hinweis aufzunehmen:

```
Liebe Studierende!
Die Fachschaft Mathematik möchte Weihnachten feiern. Mit Euch! Ihr seid
eingeladen am 14.12. ab 18 Uhr im Asta Café einen Glühwein oder Punsch auf
die kommenden Feiertage zu trinken. Wir freuen uns auf euch!
```