Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung

WS 2016/2017

Analysis 1

Übungsblatt 9

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 1 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 22.12.2016, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Sei f_n die Folge der Fibonacci-Zahlen durch $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 3$ definiert (siehe Aufgabe 7 und 8 von Blatt 2). Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n .$$

Aufgabe 2 (4 Punkte): Sei $\varepsilon > 0$. Bestimmen Sie ein $\delta > 0$, für das gilt:

$$0 \leq x < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \left|\sqrt{x} - x^3\right| < \varepsilon .$$

Aufgabe 3 (3 Punkte): Bestimmen Sie die Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} + \frac{x-4}{x^2-16}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0} \sqrt{x}\left(\left[\frac{1}{x}\right] - \frac{1}{x}\right)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Dabei ist $[x] := \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

Aufgabe 4: Wir betrachten die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} x^k.$$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte oder zeigen Sie, dass der Grenzwert nicht existiert.

(a) $\displaystyle\lim_{x\downarrow -1} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \lim_{x\downarrow -1} f_n(x)$. (c) $\displaystyle\lim_{x\uparrow -1} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \lim_{x\uparrow -1} f_n(x)$.

Aufgabe 5: Zeigen Sie:

(a) Für $|x| < 1$ gilt: $\displaystyle|\exp(x) - 1| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x|^k = \frac{|x|}{1-|x|}$.

(b) Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in 0.

(c) Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

(d) Die Funktion exp ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte): Sei $[x] := \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ und definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f(x) = \begin{cases} [x] & \text{, falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{, falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

In welchen Punkten ist f stetig?

Aufgabe 7: Sei a_n eine Folge und $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Zeigen Sie, dass f innerhalb des Konvergenzkreises stetig ist.

Aufgabe 8 (3+1+1 Punkte): Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und $h = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Komposition der Funktionen, d.h. h ist durch $h(x) = g(f(x))$ definiert. Beweisen Sie:

(a) Falls f und g stetig sind, so ist auch h stetig.

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Falls h stetig ist, so sind auch f und g stetig.

(c) Falls f und h stetig sind, so ist auch g stetig.

Aufgabe 9: Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Die Funktion $z \mapsto p(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist für jedes Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ stetig auf $\mathbb{C}$.

(b) Jede monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und das Urbild offener Intervalle sei wieder ein offenes Intervalle, d.h.

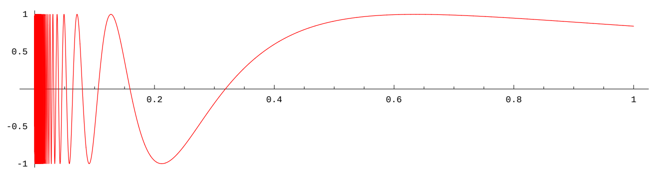
$$\forall (a, b) \subset \mathbb{R} : \exists (c, d) \subset \mathbb{R} : f^{-1}((a, b)) = (c, d) .$$

Dann ist f stetig.

Aufgabe 10 (2+2 Punkte): Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig auf* I, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

Wir betrachten $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \in (0, 1)$.



(a) Ist f stetig auf $(0, 1)$?

(b) Ist f gleichmäßig stetig auf $(0, 1)$?