Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **WS 2009/2010**

Analysis I
Aufgaben der Klausur vom 6. Februar 2010

Aufgabe 1: a) Schreiben Sie $-ie^{ix}$ für $x \in \mathbb{R}$ mit Hilfe von sin und cos.

b) Vereinfachen Sie $\mathrm{Re}\left(34\ \left(5\sin\left(\frac{6}{7}\pi\right) - 5i\cos\left(\frac{6}{7}\pi\right)\right)^{21}\right)$.

Aufgabe 2: Sei $f : (5, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) Wie ist $\lim\limits_{y \downarrow 5} f(y) = a$ definiert?

b) Wie definiert man „f hat eine vertikale Asymptote in 5"?

c) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f : (5, \infty) \to \mathbb{R}$ an, die in 5 weder einen Grenzwert noch eine Asymptote hat.

Aufgabe 3: Wir betrachten $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = \begin{cases} x^{-2} & \text{für } x > 0, \\ -x^2 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion.

b) Welche der folgenden Behauptungen sind richtig, welche falsch? Beweisen Sie Ihre Antworten.

(i) h ist surjektiv.

(ii) h ist monoton.

(iii) h ist invertierbar.

Aufgabe 4: Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{2 + 3x + x^2}\, dx$.

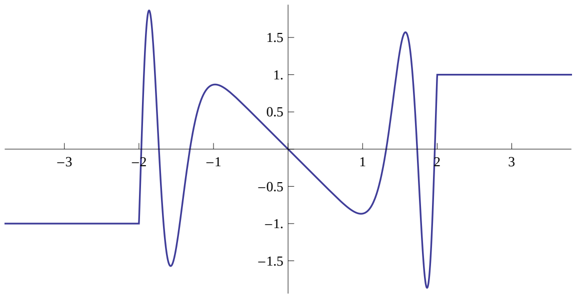
Aufgabe 5: Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert wie folgt:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ x^2 \cos\left(x^{-2}\right) & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

a) Ist g stetig in 0?

b) Ist g differenzierbar in 0?

Aufgabe 6:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert wie folgt:



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 2, \\ -x\cos\left(\frac{1}{6}\pi x^4\right) & \text{für} \quad |x| \leq 2, \\ -1 & \text{für} \quad x < -2. \end{cases}$$

Wir setzen $F(x) = \int_{-3}^{x} f(s)\, ds$.

a) Zeigen Sie, dass $f(-x) = -f(x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie $F(x)$ für $x > 3$.

c) Stimmt es, dass $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7: Gibt es Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von $\sin(z) = \sqrt{3}$? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst $w = e^{iz}$.

Aufgabe 8: a) Definieren Sie den Begriff „Cauchy-Folge“.

b) Ist $\{\ln(n)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge?

c) Ist $\{\arctan(n)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge?

Aufgabe 9: Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n + n^2}$?

Aufgabe 10: Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{1-1/x}$.

a) Berechnen Sie das zugehörige Taylor-Polynom t_2 von Ordnung 2 in 1.

b) Wie lautet der Restterm von Lagrange bei diesem Polynom?

c) Zeigen Sie, dass

$$|f(x) - t_2(x)| \leq 5(x-1)^3 \;\text{ für } x \in [1,2].$$