Name:

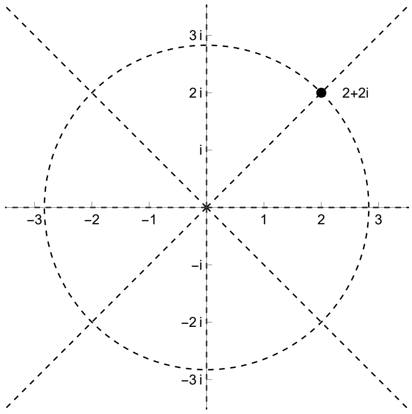
Aufgabe 1

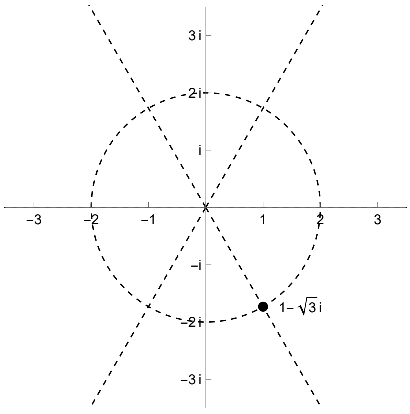
Vereinfachen Sie für $z = \left(\dfrac{2+2\,i}{1-i\sqrt{3}}\right)^8$ so weit wie möglich:

(i) $|z|$,

(ii) $\mathrm{Arg}\,(z)$,

(iii) z.

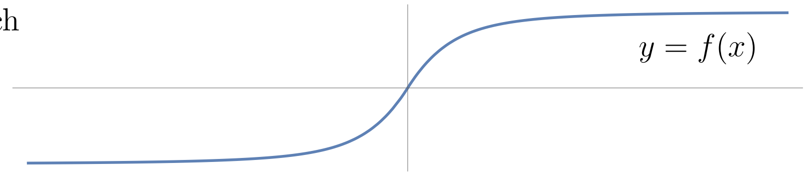




Name: | Aufgabe 2

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ |x| \arctan(1/x) & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$



(i) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. *Hinweis:* $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Existiert die zweite Ableitung $f''(0)$?

Name:

Aufgabe 3

(i) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$?

(ii) Berechnen Sie die Termen a_n in der Potenzreihe zu $\ln(2+x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Name:

Aufgabe 4

(i) Zeigen Sie, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(iy) = \cos(y) + i\sin(y).$$

(ii) Wahr oder nicht wahr? Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|\cos(z)|^2 + |\sin(z)|^2 = 1.$$

(iii) Es gilt $\operatorname{Re}(\sin(x+iy)) = \sin(x)\cosh(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Vereinfachen Sie ähnlich für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Im}(\sin(x+iy)).$$

Name:

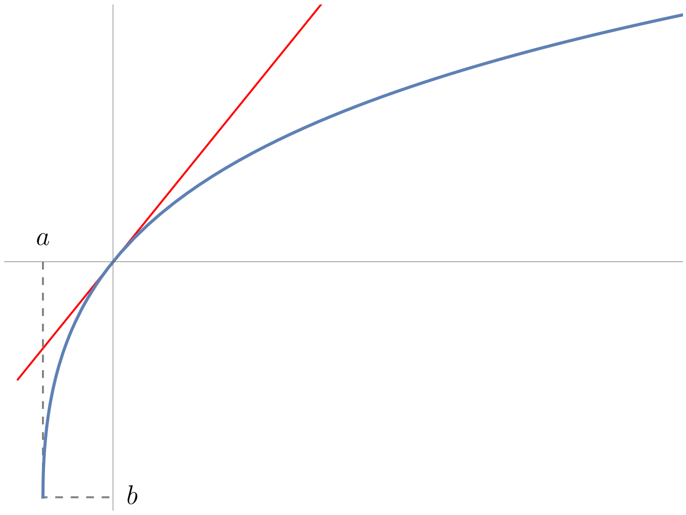
Aufgabe 5

Bei Mathematica ist die Funktion

$$\mathit{ProductLog} : [a, \infty) \to [b, \infty)$$

definiert als die Inverse des monoton wachsenden Teils der Funktion f auf $\mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = xe^x$. Eine Skizze dieser Funktion *ProductLog* steht nebenan.

Berechnen Sie a und b, und die Tangente durch $(0, 0)$.



Name:

Aufgabe 6

(i) Berechnen Sie für die Funktion $x \mapsto 1 - \cos(2x)$ das Taylor-Polynom der Ordnung 4 an der Stelle $x = 0$.

(ii) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x^3 \sin(x^{-2})}{1 - \cos(2x)}$.

Name: **Aufgabe 7**

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und seien $x, h \in \mathbb{R}$.

(i) Nehme an $h > 0$. Zeigen Sie, dass es $\xi \in (0, h)$ gibt mit

$$\frac{g\left(x+h\right) - 2g(x) + g(x-h)}{h} = g'\left(x+\xi\right) - g'\left(x-h+\xi\right).$$

Hinweis: Betrachten Sie $f(s) := g(x+s) - g(x) - g(x-h+s) + g(x-h)$.

(ii) Nehme an $h \neq 0$. Zeigen Sie, dass es $\eta \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{g\left(x+h\right) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = g''(x+\eta).$$

Beschreiben Sie auch das kleinstmögliche Intervall, wo ein η liegen wird.

Name: Aufgabe 8

Begründen Sie, ob (i) und (ii) Riemann-integrierbar oder uneigentlich Riemann-integrierbar sind und wenn es zutrifft, dann berechnen Sie das Ergebnis:

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{-2} dx;$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx.$