Prof. Dr. Guido Sweers
Erik Faulhaber **WS 2022/23**

Analysis 1

Übungsblatt 0

Lösungen von bepunkteten Aufgaben aus den Übungsblättern müssen individuell donnerstags bis 12.00 Uhr eingereicht werden. Es wird 12 Übungsblätter geben mit solchen Aufgaben. Sie bekommen eine Klausurzulassung, wenn Sie am Ende des Semesters 50 % der maximal möglichen Übungspunkte erreicht haben. Dieses Blatt 0 ist für die Besprechung in der ersten Übungsstunde gedacht (Woche 17.–21. Oktober) und deshalb noch unbepunktet.

Aufgabe 1: Berechnen Sie ohne Taschenrechner die kleinsten Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ derart, dass:

$$\frac{3}{25} - \frac{n}{m} + \frac{4}{9} = \frac{7}{15}.$$

Aufgabe 2: Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{x^3 - x}{x^2 - 3} > 0?$$

Aufgabe 3: Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $z_0, z_1, \dots, z_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

(a) Beweisen Sie:

$$10^n z_n + 10^{n-1} z_{n-1} + \cdots + 10^1 z_1 + 10^0 z_0 \text{ ist durch 3 dividierbar}$$

genau dann, wenn

$$z_n + z_{n-1} + \cdots + z_1 + z_0 \text{ ist durch 3 dividierbar.}$$

(b) Gilt dies auch, wenn man $z_k \in \mathbb{Z}$ nimmt?

Aufgabe 4: Richtig oder falsch?

(a) Diese Ungleichung:

$$\frac{\frac{1}{834^{312}+1} - \frac{1}{834^{312}-1}}{\frac{1}{833^{312}-1} - \frac{1}{832^{312}+1}} < \frac{\frac{1}{835^{312}+1} - \frac{1}{835^{312}-1}}{\frac{1}{834^{312}-1} - \frac{1}{834^{312}+1}}.$$

(b) Diese Folgerung für eine Zahl $x \in \mathbb{Q}$:

$$x^2 = x^{4/2} = \left(x^4\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^4} = \sqrt{|x|^4} = |x|^2.$$

(c) Diese Folgerung für eine Zahl $x \in \mathbb{Q}$:

$$x^3 = x^{6/2} = \left(x^6\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^6} = \sqrt{|x|^6} = |x|^3.$$

(d) Diese Gleichung:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{2048} + \frac{1}{4096} = 1 - \frac{1}{4096}.$$

(e) Diese Behauptung: $x > y \implies x^2 > y^2$.

Aufgabe 5: Wir nehmen

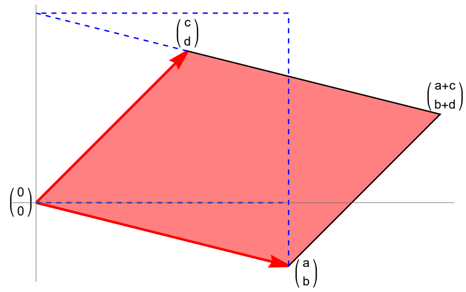
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \qquad B = \{1, 3, 5, 7\} \qquad \text{und } C = \{2, 3, 4, 6\}.$$

Geben Sie an:

$$\begin{array}{rlrl} i. & (A \cap B) \cup C, & iv. & (A \cap B) \setminus C, \\ ii. & A \cap (B \cup C), & v. & (A \setminus B) \cap C, \\ iii. & (A \cup B) \cap C, & vi. & (B \setminus A) \cup (A \setminus C). \end{array}$$

Aufgabe 6: Gegeben sind zwei Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in Q_4$ und $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in Q_1$. Hier ist Q_i das i-te Quadrant.

Beweisen Sie, dass der Flächeninhalt des gefärbten Abschnittes gleich $ad - bc$ ist.



Aufgabe 7: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x \in \mathbb{R}$, wenn:

$$\boxed{\text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es } \delta > 0 \text{ derart, dass für alle } y \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - y| < \delta \text{ gilt } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.}$$

(a) Wie schreibt man dies kurz mit $\forall$, $\exists$ und $\Longrightarrow$?

(b) Wie lautet die Verneinung? Oder anders gesagt, wie definiert man, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht stetig ist in x? Schreiben Sie dies ohne „nicht“ und ohne das $\neg$ -Symbol.

(c) Ist die Funktion $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$, definiert durch $g(x) = \frac{1}{x}$, stetig in jedem Punkt ihres Definitionsgebietes? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ x\,(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor} & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

Hier verwendet man $\lfloor a \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z}; n \leq a\}$.
Ist die Funktion f stetig in 0?

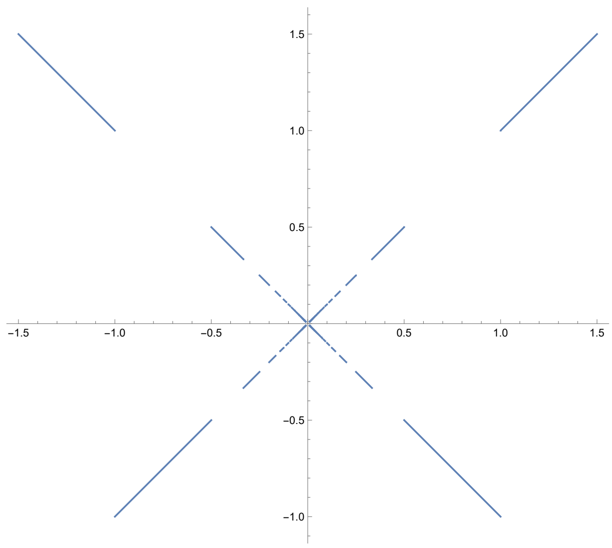


Abbildung 1: Skizze der Funktion f