Prof. Dr. Guido Sweers
Erik Faulhaber **WS 2022/23**

Analysis 1

Übungsblatt 1

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 20.10., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1: Prüfen Sie jeweils, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv, bijektiv sind.

(a) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = |x|$,

(b) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, f(x) = |x|$,

(c) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, f(x) = |x|$,

(d) $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, f(x) = x^3$,

(e) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, f(x) = \left|x + \frac{1}{3}\right|$,

(f) $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$,
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0, \\ 1 - x & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

(g) $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$,
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Z}, \\ 1 - x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Bemerkung: Seien A, B zwei beliebige Mengen und $f\colon A \to B$ eine Funktion.
Für $X \subset A$ ist das *Bild* von X unter f definiert als $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$.
Für $Y \subset B$ ist das *Urbild* von Y unter f definiert als $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**:** Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) f ist injektiv genau dann, wenn $\forall X \subset A\colon f^{-1}(f(X)) = X$,

(b) f ist surjektiv genau dann, wenn $\forall Y \subset B\colon f(f^{-1}(Y)) = Y$,

(c) f ist injektiv genau dann, wenn $\forall X, Y \subset A\colon f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Hinweis: Für eine Mengengleichheit $X = Y$ zeigen Sie $X \subset Y$ und $Y \subset X$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**:** Seien A, B, C beliebige Mengen.
Beantworten Sie die folgenden Fragen und beweisen Sie Ihre Antworten, indem Sie Funktionen finden oder zeigen, dass es keine gibt.
Hinweis: Die Verknüpfung zweier Funktionen ist definiert als $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.

(a) Können Sie eine Funktion $f\colon B \to C$ und eine nicht injektive Funktion $g\colon A \to B$ finden, sodass $f \circ g\colon A \to C$ injektiv ist?

(b) Können Sie eine nicht injektive Funktion $f\colon B \to C$ und eine Funktion $g\colon A \to B$ finden, sodass $f \circ g\colon A \to C$ injektiv ist?

(c) Können Sie eine Funktion $f\colon B \to C$ und eine nicht surjektive Funktion $g\colon A \to B$ finden, sodass $f \circ g\colon A \to C$ surjektiv ist?

(d) Können Sie eine nicht surjektive Funktion $f\colon B \to C$ und eine Funktion $g\colon A \to B$ finden, sodass $f \circ g\colon A \to C$ surjektiv ist?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**:** Beweisen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{k} n^3 = \frac{k^2 + 2k^3 + k^4}{4}.$$

Aufgabe 5: Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

(a) $3^{2n+3} - 2^{2n+1} = 5m$,

(b) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9m$.

Aufgabe 6: Sei $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Aussagen. Es wurde bewiesen, dass für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt:

$$A_{2n} \implies A_{3n} \text{ und } A_n \implies A_{2n+1}.$$

(a) Wenn jemand auch noch A_1 und A_2 beweist, sind dann alle ungeraden Aussagen wahr?

(b) Wenn jemand zusätzlich auch noch A_3 und A_4 beweist, sind dann alle ungeraden Aussagen wahr?

Aufgabe 7 (2 Punkte)**:** Sei $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Aussagen. Es wurde bewiesen, dass für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt:

$$B_n \implies B_{2n} \text{ und } B_n \implies B_{2n+1}.$$

(a) Welche Aussagen B_n sind wahr, wenn B_2 wahr ist?

(b) Welche Aussagen B_n sind wahr, wenn B_1 wahr ist?

Aufgabe 8 (4 Punkte)**:** Beweisen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{5k + 3k^2}{4k^2 + 12k + 8}.$$