Prof. Dr. Guido Sweers
Erik Faulhaber **WS 2022/23**

Analysis 1

Übungsblatt 10

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 22.12., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1 ($1+1+1+1$ Punkte)**:** (a) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Zeigen Sie mit der epsilon-delta-Definition, dass auch $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $h(x) = \max(f(x), g(x))$ eine stetige Funktion ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}|a-b|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass $x \mapsto |x|$ eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist.

(d) Begründen Sie mit (b), (c), Lemma 10.1 und Lemma 10.5, dass h aus (a) eine stetige Funktion ist.

Aufgabe 2: (a) An welchen Stellen ist die Funktion $z \mapsto |z|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ stetig?

(b) An welchen Stellen ist die Funktion $z \mapsto \operatorname{Arg}(z)\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ stetig?

Aufgabe 3: Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Falls f und g unstetig in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ sind, so ist auch $f + g$ unstetig in a.

(b) Falls f und g unstetig in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ sind, so ist auch fg unstetig in a.

(c) Falls f eine surjektive und monoton steigende Abbildung ist, so ist f stetig auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4 ($2+1+0+0$ Punkte)**:** Berechnen Sie alle (horizontalen, vertikalen und schiefen) Asymptoten von

(a) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$,

(b) $f\colon \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4x$,

(c) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^{10}+2x^2}}{x^4-1}$,

(d) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x+\sin(x)}$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**:** Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Beweisen Sie, dass dann $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 6: (a) Wir betrachten die Temperatur auf dem Äquator, die als stetige Funktion $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(2\pi)$ dargestellt werden kann. Gibt es zwei verschiedene Orte mit gleicher Temperatur?

(b) Sei $S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f\colon [a, b] \to S$ gibt, die bijektiv und stetig ist.

Aufgabe 7: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ist f stetig in 0?

Aufgabe 8 (5 Punkte)**:** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass $f(I)$ ein Intervall ist.
Hinweis: Sei $\alpha := \inf f(I)$ und $\beta := \sup f(I)$. Zeigen sie zunächst, dass $(\alpha, \beta) \subset f(I)$.

Aufgabe 9 ($3 + 2$ Punkte)**:** (a) Zeigen, Sie, dass die Gleichung $e^{-x} = \sqrt{x} - 1$ genau eine Lösung $x \in [0, 4]$ hat.
Hinweis: Zeigen Sie Monotonie.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Zeigen Sie, dass f ein globales Minimum hat.

Aufgabe 10: Wir betrachten $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = x(1 - x)\left[\frac{1}{x(1 - x)}\right],$$

wobei $[\cdot]$ die Ganzzahlfunktion ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\sup_{x\in(0,1)} f(x) = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass $\limsup_{x\downarrow 0} f(x) = 1$.

(c) Existiert $\lim_{x\downarrow 0} f(x)$?

(d) Hat f ein Maximum in $(0, 1)$?

(e) Hat f ein Minimum in $(0, 1)$?

Aufgabe 11: Prüfen Sie, ob die Wurzelfunktion $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist.