Prof. Dr. Guido Sweers
Erik Faulhaber

WS 2022/23

Analysis 1

Übungsblatt 11

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 12.01., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1 ($2 + 1 + 1$ Punkte)**:** Für $z \in \mathbb{C}$ sind die Funktionen Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus definiert durch

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

(a) Beweisen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{und} \quad \cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

(b) Untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen $\sinh(z)$ und $\sin(iz)$.

(c) Untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen $\cosh(z)$ und $\cos(iz)$.

Aufgabe 2: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ist f differenzierbar in 0?

Aufgabe 3 ($1 + 1 + 1 + 4 + 3 + 1$ Punkte)**:** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig Lipschitz-stetig auf* I, wenn es ein $L > 0$ gibt so, dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \text{ für alle } x, y \in I.$$

Oft nennt man gleichmäßig Lipschitz-stetige Funktionen einfach nur Lipschitz-stetig auf I. Beachten Sie den Unterschied zur Definition der Lipschitz-Stetigkeit in einem Punkt (Definition 11.6).

(a) Aus der Vorlesung wissen Sie, dass Lipschitz-Stetigkeit in einem Punkt a die Stetigkeit in a impliziert. Folgt aus Stetigkeit in a auch Lipschitz-Stetigkeit in a?

(b) Offensichtlich impliziert gleichmäßige Lipschitz-Stetigkeit die Lipschitz-Stetigkeit in jedem Punkt. Gilt auch die Umkehrung?

(c) Folgt aus gleichmäßiger Lipschitz-Stetigkeit gleichmäßige Stetigkeit?

(d) Folgt aus gleichmäßiger Stetigkeit gleichmäßige Lipschitz-Stetigkeit?
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(e) Aus der Vorlesung wissen Sie, dass aus Differenzierbarkeit in a Lipschitz-Stetigkeit in a folgt. Folgt aus Differenzierbarkeit auf einem Intervall I auch gleichmäßige Lipschitz-Stetigkeit auf I? Was passiert, wenn I abgeschlossen ist?

(f) Folgt aus gleichmäßiger Lipschitz-Stetigkeit auf einem Intervall I auch die Differenzierbarkeit auf I?

Aufgabe 4 (3 Punkte)**:** Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die auf (a,b) differenzierbar sind mit

$$f(a) \leq g(a).$$

Zeigen Sie, dass wenn $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$ gilt, so gilt auch $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$.

Aufgabe 5: (a) Wir betrachten für $y \in \mathbb{R}$ die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = |x + iy|$. Zeigen Sie, dass

$$f'(x) = \frac{x}{|x+iy|} \text{ für } x + iy \neq 0$$

und dass die Funktion nicht differenzierbar ist für $x + iy = 0$.

(b) Wir betrachten für $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(y) = |x + iy|$. Zeigen Sie, dass

$$g'(y) = \frac{y}{|x+iy|} \text{ für } x + iy \neq 0$$

und dass die Funktion nicht differenzierbar ist für $x + iy = 0$.

(c) Ist die nächste Aussage richtig oder falsch?

Wenn $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch $h(z) = |z|$, komplex differenzierbar ist für $z \neq 0$, dann folgt

- aus (a), dass $h'(z) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ für $z \neq 0$, und
- aus (b), dass $ih'(z) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$ für $z \neq 0$.

(d) Ist die nächste Aussage richtig oder falsch?

Die Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $h(z) = |z|$ ist nirgends komplex differenzierbar.

Aufgabe 6 (2 Punkte)**:** Eine unbekannten Größe $x \in \mathbb{R}$ wird n mal gemessen. Es ergeben sich die Messwerte $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Der mittlere quadratische Fehler wird durch

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$$

definiert. Für welches $x \in \mathbb{R}$ wird dieser Fehler minimal?