Prof. Dr. Guido Sweers
Erik Faulhaber **WS 2022/23**

Analysis 1

Übungsblatt 12

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 19.01., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f'(0) = 0$ ist. Liegt ein Extremum in $x = 0$ vor?

Aufgabe 2: Wahr oder falsch?

(a) Wenn $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton sind, dann ist $f + g$ monoton.

(b) Wenn $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton sind, dann ist $f \circ g$ monoton.

(c) Wenn $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex sind, dann ist $f + g$ konvex.

(d) Wenn $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex sind, dann ist $f \circ g$ konvex.

Aufgabe 3 (3 + 3 Punkte)**:** Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen für alle $y > x > 0$.

(a) $y \ln y - x \ln x \leq (y - x)(1 + \ln y)$,

(b) $e^{y^2} - e^{x^2} \leq (y - x)(x + y)e^{y^2}$.

Hinweis: Nutzen Sie den Mittelwertsatz.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von $f\colon [-1, 9] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^5 & \text{für } x \in [-1, 1), \\ 2 - (x - 2)^2 & \text{für } x \in [1, 3), \\ 3x - 8 & \text{für } x \in [3, 4], \\ \frac{12}{x} & \text{für } x \in (4, 9]. \end{cases}$$

Aufgabe 5: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \arctan(x) + e^x$$

hat eine Inverse $f^{\text{inv}}\colon A \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie $A \subset \mathbb{R}$.

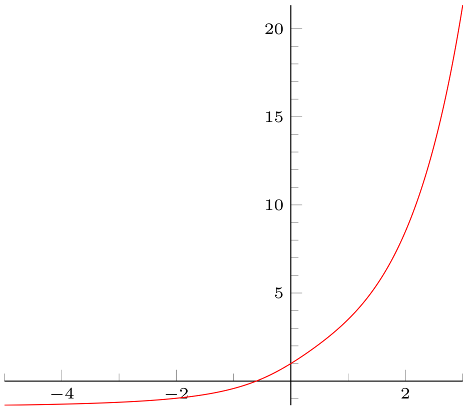

Abbildung 1: Graph zu Aufgabe 5

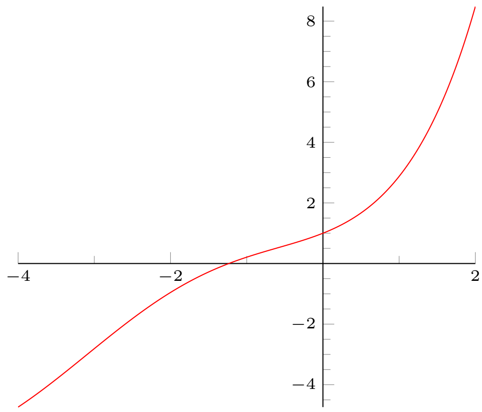

Abbildung 2: Graph zu Aufgabe 6

Aufgabe 6 (2 + 2 + 2 Punkte)**:** Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x - \sin(x) + \exp(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

(b) Bestimmen Sie $f(\mathbb{R})$.

(c) Berechnen Sie $(f^{\mathrm{inv}})'(1)$.

Aufgabe 7: Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(x) = x(1-x)^2 + e^x.$$

(a) Zeigen Sie $g'(x) \geq 3x^2 + e^x > 0$ für alle $x \leq \frac{1}{4}$.

(b) Zeigen Sie $g'(x) \geq 3x(x-1) + e^x \geq -\frac{3}{4} + e^x > 0$ für alle $x \in [\frac{1}{4}, 1]$.

(c) Zeigen Sie $g'(x) \geq e^x > 0$ für alle $x \geq 1$.

(d) Zeigen Sie, dass g eine differenzierbare Inverse $g^{\mathrm{inv}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat.

Aufgabe 8 (2 + 2 + 4 Punkte)**:** Wir möchten die Taylorentwicklung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{1}{x+2}$$

untersuchen.

(a) Bestimmen Sie das n-te Taylorpolynom p_n von f bei 0.

(b) Können wir Lemma 12.20 anwenden, um zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x) \tag{1}$$

gilt auf einem Intervall I mit $0 \in I$?

(c) Gibt es ein Intervall I mit $0 \in I$ so, dass (1) für alle $x \in I$ gilt? Falls ja, finden Sie das maximale Intervall, auf dem dies gilt.