Prof. Dr. Guido Sweers
Erik Faulhaber **WS 2022/23**

Analysis 1

Übungsblatt 13

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 26.01., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**:** Berechnen Sie den folgenden Grenzwert mithilfe der Potenzreihenentwicklung:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x)-1}{5x^2}.$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-\sin(x)-1-x^2/2}{x^2\sin(x)}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-\ln(x)-1/x}{(\sin(\pi x))^2}$.

Hinweis: Benutzen Sie für (a) den Mittelwertsatz.

Aufgabe 3 (2 + 3 Punkte)**:** Berechnen Sie die Taylorreihe von

(a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = x\sin(x)$ um die Stelle $x=\pi$,

(b) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \ln(1+e^{ax})$ mit $a\in\mathbb{R}$ um die Stelle $x=0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**:** Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = (1+e^x)^2$ soll in der Umgebung von $x=0$ durch das Taylorpolynom 3. Grades angenähert werden. Welchen Näherungswert erhält man an der Stelle $x=0.1$ im Vergleich zum exakten Funktionswert?

Aufgabe 5: Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}\sin(\sqrt{-x}) & \text{für } x<0,\\ \sqrt{x}\sinh(\sqrt{x}) & \text{für } x\geq 0.\end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist.

(b) Geben Sie die zugehörige Taylorpolynome $t_n(x)$ um $x=0$ an.

(c) Geben Sie Argumente an, wieso für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - t_n(x)| = 0.$$

Aufgabe 6: Berechnen Sie $\int_0^4 \min(x, 1, (3-x)^3)\,\mathrm{d}x$ ohne Stammfunktionen zu verwenden.

Aufgabe 7: Man kann mit vollständiger Induktion zeigen, dass

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^4 = \frac{1}{5}(n-1)n\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big(n^2-n-\frac{1}{3}\Big).$$

Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4$.

(a) Zeigen Sie, dass $m_n := \frac{1}{5}(1-\frac{1}{n})\big(1-\frac{1}{2n}\big)\big(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{3n^2}\big)$ eine Untersumme für f auf $[0,1]$ ist,

(b) Zeigen Sie, dass $M_n = m_n + \frac{1}{n}$ eine Obersumme für f auf $[0,1]$ ist,

(c) Zeigen Sie damit, dass $\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x$ existiert und berechnen Sie dessen Wert.

Aufgabe 8 (2 + 2 + 0 Punkte)**:** Sei $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, wobei $a > 0$. Zeigen Sie:

(a) Ist f gerade, d. h. $f(x) = f(-x)$, so ist $\int_{-a}^{c} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-c}^{a} f(s)\,\mathrm{d}s$ für alle $-a < c < a$.

(b) Ist f ungerade, d. h. $-f(x) = f(-x)$, so ist $\int_{-a}^{c} f(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{-c}^{a} f(s)\,\mathrm{d}s$ für alle $-a < c < a$, insbesondere ist $\int_{-a}^{a} f(s)\,\mathrm{d}s = 0$.

(c) Gilt a) bzw. b) auch für uneigentliche Integrale $\int_{-\infty}^{\infty}$, falls f integrierbar auf ganz $\mathbb{R}$ ist?

Aufgabe 9: Sei $f(x) = e^{-x^2/2}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Benutzen Sie dabei die Tatsache, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$ gilt.

Aufgabe 10 (3 Punkte)**:** Betrachte

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } [1/x] \text{ gerade,} \\ -1 & \text{für } [1/x] \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

wobei $[\cdot]$ die Ganzzahlfunktion bezeichnet. Ist diese Funktion Riemann-integrierbar auf $[0,2]$?

(a) Falls nein, begründen Sie dies und berechnen Sie

$$\int_{\frac{1}{10}}^{2} f_0(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Falls ja, begründen Sie dies und berechnen Sie

$$\int_0^2 f_0(x)\,\mathrm{d}x.$$