Prof. Dr. Guido Sweers
Erik Faulhaber **WS 2022/23**

Analysis 1

Übungsblatt 2

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 27.10., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1 (2 Punkte)**:** Definiere eine Folge in $\mathbb{Q}$ durch $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n}{n}$ für $n \in \mathbb{N}^+$ und $x_1 = 3$.

(a) Ist diese Folge eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$?

(b) Ist diese Folge eine konvergente Folge in $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 2 (7 Punkte)**:** Wir definieren induktiv eine Folge durch $x_0 = \frac{7}{3}$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, das $x_n \in \mathbb{Q}$ und $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass $x_{n+1}^2 = 5 + \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{5}{x_n}\right)^2 \geq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen Sie, dass $x_n^2 \leq 5 + \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Zeigen Sie, dass die Folge $\{x_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ ist.

(e) Ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$?

(f) Ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathbb{Q}$ konvergente Folge?

(g) Ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathbb{R}$ konvergente Folge?

Verwenden Sie nur Ergebnisse aus den ersten beiden Wochen des Skripts.

Aufgabe 3: Sei $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $(x, y) \prec (\tilde{x}, \tilde{y})$ definiert durch

$$\max(x - \tilde{x}, (y - \tilde{y})^3) \leq 0.$$

Zeigen Sie, dass $(M, \prec)$ geordnet, aber nicht total geordnet ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**:** Sei $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] := \left\{p + q\sqrt{2}; p, q \in \mathbb{Q}\right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right], +, \cdot, \leq\right)$ ein total geordneter Körper ist.

(b) Wieso ist er nicht vollständig?

Aufgabe 5: Wir definieren eine Folge durch $f_1 = 1, f_2 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 3$. Sei $a_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$ für $n \in \mathbb{N}^+$. Beweisen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $a_n \in [1, 2]$.

(b) Wir nehmen an, dass a_n gegen einen Grenzwert a konvergiert. Bestimmen Sie unter dieser Annahme den Grenzwert a.

(c) Zeigen Sie, dass die folgende Formel gilt:

$$f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

Aufgabe 6 (3 Punkte)**:** (a) Seien $A_0, A_1, \ldots$ abzählbar viele abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass

$$B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

abzählbar ist.

(b) Benutzen Sie (a) und dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, um zu zeigen, dass jedes Intervall (a, b) mit $a < b$ überabzählbar ist.

Aufgabe 7 (3 Punkte)**:** Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

(b) Sei $X \subset \mathbb{R}$ mit $a := \sup X$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in X$, sodass $a - \varepsilon < x \leq a$.

(c) Sei $X, Y \subset \mathbb{R}$ und definiere $a := \sup X$ und $b := \sup Y$. Dann ist $a + b$ das Supremum der Menge $X + Y := \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$.

Aufgabe 8: Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $x \leq y + \varepsilon$ genau dann für alle $\varepsilon > 0$ gilt, wenn $x \leq y$.

(b) Gilt auch $x < y + \varepsilon$ genau dann für alle $\varepsilon > 0$, wenn $x < y$?

(c) Zeigen Sie, dass $|x - y| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ genau dann, wenn $x = y$.

Aufgabe 9: Jemand sagt Ihnen beim gemeinsamen Lernen:

> Ich verstehe nicht, warum man die Forderung der Reflexivität bei Äquivalenzrelationen braucht. Wenn es symmetrisch und transitiv ist, dann kann man wie folgt argumentieren: $x \sim y$ impliziert mit der Symmetrie, dass $y \sim x$. Und da aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt, dass $a \sim c$, folgt aus $x \sim y$ und $y \sim x$, dass $x \sim x$. Also folgt aus Symmetrie und Transitivität die Reflexivität.

Hat die Person recht? Schreiben Sie entweder einen formalen Beweis auf oder geben Sie ein Gegenbeispiel an und erläutern Sie, warum der Beweis nicht korrekt ist.