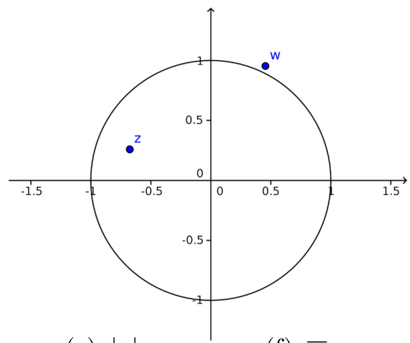
Prof. Dr. Guido Sweers
Erik Faulhaber **WS 2022/23**

Analysis 1

Übungsblatt 3

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 03.11., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1: In der Zeichnung ist z und w auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene markiert. Zeichnen Sie auch die folgenden komplexen Zahlen ein:

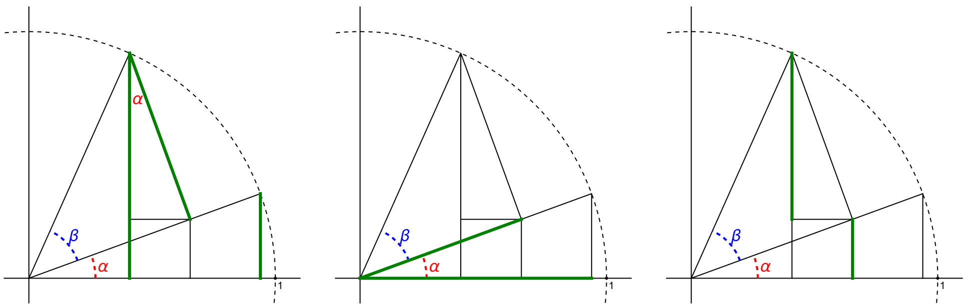


(a) z^2 (b) $\frac{1}{w}$ (c) zw (d) $\frac{w}{z}$ (e) $|z|$ (f) $\overline{w}$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**:** Die trigonometrische Identität

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

soll gezeigt werden. Dazu betrachten wir die folgende Grafik und die dazugehörige Anleitung.



(a) Begründen Sie, dass beide Winkel α im ersten Bild gleich groß sind.

(b) Schreiben Sie $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$ und $\sin(\alpha + \beta)$ an die passenden, grün markierten Geraden im ersten Bild und begründen Sie dies.

(c) Geben Sie die Längen der grün markierten Geraden im zweiten Bild an.

(d) Geben Sie die Längen der grün markierten Geraden im dritten Bild an.

Aufgabe 3: Begründen Sie:

(a) $\left\{\frac{2n+1}{2m+1} : n, m \in \mathbb{Z}\right\}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{C}$.

(c) $\{r(\cos(t) + i\sin(t)) : r \in \mathbb{Q}^+ \text{ und } t \in \mathbb{R}\}$ liegt dicht in $\mathbb{C}$.

(d) $\{r(\cos(t) + i\sin(t)) : r \in \mathbb{Q}^+ \text{ und } t \in \mathbb{Q}\}$ liegt dicht in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 4: Die folgenden Additionstheoreme gelten:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

Nutzen Sie diese Additionstheoreme und $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ für die folgenden Aufgaben.

(a) Zeigen Sie $(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) Berechnen Sie $\cos(\frac{\pi}{6})$, $\cos(\frac{\pi}{4})$ und $\cos(\frac{\pi}{3})$.

Aufgabe 5: Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $a + ib$ auf, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) $(3+4i)^3$

(b) $\dfrac{3+2i}{5-6i}$

(c) $\overline{7-3i} \cdot \overline{2+i}$

(d) $(2-3i) \cdot \overline{3+2i}$

(e) $\overline{|5+11i|}$

(f) $\dfrac{(1+i)^{1000}}{(2\sqrt{3}-2i)^{251}}$

Aufgabe 6 (4 Punkte)**:** Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$ so, dass gilt

(a) $\overline{z} = i(z-1)$,

(b) $z^2 \cdot \overline{z} = z$,

(c) $|z+3i| = 3|z|$,

(d) $z^2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**:** Sei m_k die k-te Ziffer Ihrer Matrikelnummer für $k \in \{1,3,5,7\}$. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\frac{m_1 + i(m_7+3)}{m_3 + 1 - i(m_5+2)} = a + ib.$$

Aufgabe 8 (3 Punkte)**:** Berechnen Sie:

(a) $\arg(2-2i)$

(b) $\arg(1+\sqrt{3}i)$

Sei $z \in \mathbb{C}$ und $\arg(z) = \theta$, was ist der Wert von $\arg(\frac{1}{z})$?

Aufgabe 9: Sei $k \in \mathbb{N}^+$. Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^k = 1$.

Aufgabe 10 (5 Punkte)**:** Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a) $z^3 = -i$

(b) $z^3 = 1 - i$