Prof. Dr. Guido Sweers
Erik Faulhaber **WS 2022/23**

Analysis 1

Übungsblatt 4

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 10.11., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1: Bei Computeralgebrasystemen sieht man häufiger Ausdrücke wie $\sqrt{-1}$ und manchmal liest man $\sqrt{-1} = i$. Was ist an folgender Rechnung falsch?

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Aufgabe 2: Wir definieren $w \leq_{\mathbb{C}} z$ durch $\operatorname{Re}(w) \leq \operatorname{Re}(z)$ und $\operatorname{Im}(w) \leq \operatorname{Im}(z)$.

(a) Ist $\leq_{\mathbb{C}}$ eine Ordnung auf $\mathbb{C}$?

(b) Ist $\leq_{\mathbb{C}}$ eine totale Ordnung auf $\mathbb{C}$?

(c) Gilt für $0 \leq_{\mathbb{C}} z$ und $u \leq_{\mathbb{C}} v$, dass $zu \leq_{\mathbb{C}} zv$?

Selbstverständlich müssen Sie Ihre Antworten begründen.

Aufgabe 3: Beweisen Sie, dass für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z - w|^2 + |z + w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

Erklären Sie, wieso man dies Parallelogrammgleichung nennt.

Aufgabe 4 (2+1 Punkte)**:** Sei $p(z)$, $z \in \mathbb{C}$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass

(a) $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$

(b) $p(z) = 0$ genau dann, wenn $p(\overline{z}) = 0$

Aufgabe 5 (4 Punkte)**:** Berechnen Sie alle Nullstellen der folgenden Polynome.

(a) $z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i$

(b) $z^2 - (6i - 2)z - 2i - 11$

Aufgabe 6 (4 Punkte)**:** Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r > 1$ gilt:

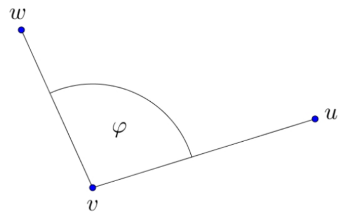
$$\frac{r^4 - r}{r^2 + r + 1} \leq \left| \frac{z^4 + iz}{z^2 + z + 1} \right| \leq \frac{r^4 + r}{(r - 1)^2}.$$

Aufgabe 7: Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $a_i \in \mathbb{C}$ mit $|a_i| < 1$. Sei

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Zeigen Sie, dass alle Lösungen von $P(z) = 0$ innerhalb des Kreises $|z| = n$ liegen.

Aufgabe 8: Seien u, v, w drei verschiedene komplexe Zahlen.



(a) Es sei $\varphi \in [0, 2\pi)$ der Winkel, den man erhält, wenn man u, v und w in der Gaußebene einzeichnet und die Verbindungsstrecke von v nach u als ersten Schenkel und die von v nach w als zweiten Schenkel wählt (s. Skizze). Zeigen Sie, dass gilt:

$$\varphi = \operatorname{Arg}\left(\frac{w-v}{u-v}\right).$$

(b) Seien α, $\beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha \neq 0$ und sei $f(z) = \alpha z + \beta$. Zeigen Sie, dass f die Winkel erhält, dass also für alle u, v, $w \in \mathbb{C}$ mit $u \neq v \neq w$ gilt:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{w-v}{u-v}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{f(w)-f(v)}{f(u)-f(v)}\right).$$

Aufgabe 9 (1+2+2 Punkte)**:** Skizzieren Sie mit Begründung die Mengen:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 2\operatorname{Im}(z)\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} : \pi/2 < \operatorname{Arg}(z) < 3\pi/4\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 3i - 1| > 3\}$

Aufgabe 10 (4 Punkte)**:** Sei

$$T(z) = \frac{z}{z+1}.$$

Finden Sie das Urbild der Kreisscheibe $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| < \frac{1}{2}\right\}$ unter T und skizzieren Sie dieses.

Aufgabe 11: Berechnen Sie $f(\mathbb{C})$ für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \dfrac{|z|}{z} + \dfrac{|z|}{\bar{z}}$.

Aufgabe 12: Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\dfrac{1}{|z|} < \dfrac{1}{|z+2i|}$?