Prof. Dr. Guido Sweers
Erik Faulhaber

WS 2022/23

Analysis 1

Übungsblatt 5

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 17.11., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1: (a) Zeichnen Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 4\}$ in der Gaussebene ein.

(b) Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

(i) $\dfrac{1}{\frac{1}{7} - 33^{26}} > \dfrac{1}{\frac{3}{22} - 33^{26}}$

(ii) $\left(\dfrac{25 - \frac{2}{3}}{\frac{1}{7} - (34^{126})^{-1}}\right)^{-3} > \left(\dfrac{\frac{1}{7} - (34^{127})^{-1}}{25 + \frac{2}{3}}\right)^{3}$

(iii) Die Folge $\left\{\dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)**:** Sei $f(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ eine komplexe gebrochen lineare Abbildung. Man nennt den Punkt z^* einen Fixpunkt von f, falls $f(z^*) = z^*$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass jedes gebrochen lineare f, außer der Sonderfall $f(z) = z$, höchstens zwei Fixpunkte haben kann.

(b) Geben Sie je ein Beispiel für eine komplexe gebrochen lineare Funktion die (i) zwei, (ii) genau einen und (iii) keinen Fixpunkt haben.

Aufgabe 3 (1+1+1 Punkte)**:** Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) Es gibt eine Cauchyfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{2k} < 0$ und $a_{2k-1} > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Es gibt eine unbeschränkte Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, die eine Cauchyfolge als Teilfolge besitzt.

(c) Es gibt eine reelle Cauchyfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\liminf_{n\to\infty} a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**:** Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n =: \ell$. Zeigen Sie, dass für jede Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \ell.$$

Aufgabe 5: Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) Für $x, y > 0$ gilt, dass $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$.

(b) Für $x_1, \dots, x_n \geq 0$ gilt, dass $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

Hinweis: Nutzen Sie vollständige Induktion. Nehmen Sie an, dass $x_{n+1} \geq x_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ und wenden Sie die Bernoulli-Ungleichung auf

$$\left(1 + \frac{x_{n+1} - \hat{x}}{(n+1)\hat{x}}\right) \quad \text{an, mit} \quad \hat{x} := \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Aufgabe 6 (3 Punkte)**:** Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, positive Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n =: L$. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{n\to\infty}(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{1/n} = L$ ist.
Hinweis: Schätzen Sie die Folge von oben und von unten ab und benutzen Sie die Tatsache, dass $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ für $a > 0$.

Aufgabe 7 (3+2 Punkte)**:** Zeigen Sie für die komplexe Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$z_1 = 1 + 2i, \qquad z_{n+1} = \frac{2\mathrm{Re}(z_n)\mathrm{Im}(z_n)}{\mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{Im}(z_n)} + i\sqrt{\mathrm{Re}(z_n)\mathrm{Im}(z_n)},$$

die folgenden Aussagen:

(a) $\mathrm{Re}(z_1) \leq \mathrm{Re}(z_2) \leq \ldots \leq \mathrm{Re}(z_n) \leq \mathrm{Im}(z_n) \leq \ldots \leq \mathrm{Im}(z_2) \leq \mathrm{Im}(z_1)$.

Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion und binomische Formeln.

(b) Die Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und für den Grenzwert z gilt: $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$.

Hinweis: Der Grenzwert z muss hierbei nicht explizit berechnet werden.

Aufgabe 8: Es seien $A := \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 1\}$ und

$$f_a : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \quad \text{mit} \quad f_a(z) = (1+i)z,$$
$$f_b : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \quad \text{mit} \quad f_b(z) = \frac{1}{z - i}.$$

Beschreiben und skizzieren Sie mit Begründung die folgenden Mengen:

(a) $f_a(A)$, (b) $f_b(A)$, (c) $(f_a \circ f_b)(A)$, (d) $(f_b \circ f_a)(A)$.