Prof. Dr. Guido Sweers
Erik Faulhaber **WS 2022/23**

Analysis 1

Übungsblatt 6

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 24.11., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1: Wir definieren die reellen Folgen

(a) $a_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{4}n\pi\right)}{n+2}$,

(b) $b_n = \sin\left(\frac{1}{4}n\pi\right) + \frac{n+5}{n}$,

(c) $c_n = n + (-2)^n$,

(d) $d_n = \frac{n+5}{n} - \sin\left(\frac{n+2}{n+1}\pi\right)$,

mit $n \in \mathbb{N}$.
Bestimmen Sie jeweils:

- Hat die Folge eine monoton wachsende Teilfolge?
- Hat die Folge eine monoton fallende Teilfolge?
- Ist die Folge konvergent?
- Ist die Folge eine Cauchy-Folge?

Aufgabe 2 (3 + 2 Punkte): (a) Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, positive Folge. Zeigen Sie, dass falls $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ gilt, so gilt auch $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = L$.

(b) Folgern Sie aus (a), dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e$.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 6 von Blatt 5 und die Aussage $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ ohne Beweis.

Aufgabe 3: Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

(a) Wenn a_n und b_n konvergieren, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)^2$.

(b) Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn die Teilfolgen $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

(c) Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dann ist auch $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

Aufgabe 4: Sei $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv und $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

(a) Ist $\{a_{p(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?

(b) Zeigen Sie, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $\{a_{p(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 5 ($1 + 1 + 2$ Punkte)**:** Bestimmen Sie $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$ für die Folgen

(a) $a_n = \frac{1 + \pi^n}{\pi^n}$,

(b) $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

(c) $a_n = (1 - (-1)^n) n!$.

Aufgabe 6 (6 Punkte)**:** Eine Folge reeller Zahlen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a.$$

Zeigen Sie diese Aussage mithilfe der Definitionen von lim sup und lim inf (Definition 5.16).

Aufgabe 7: Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Aufgabe 8 (5 Punkte)**:** Sei $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der abzählbaren Menge $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Bestimmen Sie $\limsup_{n\to\infty} q_n$ und $\liminf_{n\to\infty} q_n$.

Aufgabe 9: Sei $\varepsilon > 0$. Berechnen Sie ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall n > N_\varepsilon\colon \left| \frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Aufgabe 10: (a) Können Sie eine konvergente Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ finden, für die $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg}(z_n)$ nicht konvergiert?

(b) Können Sie eine nicht konvergente Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ finden, für die $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg}(z_n)$ konvergiert?

Aufgabe 11: Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ und $\tilde{A} := \{-a \mid a \in A\}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$,

(b) $\sup(A \cap B) = \min(\sup(A), \sup(B))$,

(c) $\sup(\tilde{A}) = -\inf(A)$.