**Prof. Dr. Guido Sweers**
**Erik Faulhaber**

**WS 2022/23**

# Analysis 1

## Übungsblatt 7

---

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 01.12., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

---

**Aufgabe 1** (1+1+1+2 Punkte)**:** Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

(a) Wenn $\{a_n\}$ nicht beschränkt ist, dann hat $\{a_n\}$ auch keinen Häufungswert.

(b) Wenn $\{a_n\}$ beschränkt ist und nur einen Häufungswert hat, dann konvergiert $\{a_n\}$.

(c) Wenn $\{a_n\}$ beschränkt und divergent ist, so hat $\{a_n\}$ mindestens zwei Häufungswerte.

(d) Ist $\{a_n\}$ unbeschränkt und hat jeden Punkt in $(0,1]$ als Häufungswert, so hat $\{a_n\}$ auch den Häufungswert 0.

**Aufgabe 2** (1 + 1 + 1 + 1 Punkte)**:** Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für $x, y \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{Q}$:

(a) $(x^3)^{\frac{2}{3}} = x^2$,

(b) $(x^2)^{\frac{1}{2}} = |x|$,

(c) $x > y$ genau dann, wenn $x^q > y^q$,

(d) falls $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ mit $a \geq b$, so ist $x^a \geq x^b$.

**Aufgabe 3:** Können Sie eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ positiver Zahlen finden, sodass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, aber die Reihe $\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert?

**Aufgabe 4:** Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k(k+1)}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert.

**Aufgabe 5** (4 Punkte)**:** Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$g(z) = \frac{z^4}{z^2+1}.$$

**Aufgabe 6** (1 + 1 + 1 + 0 + 0 Punkte)**:** Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(z) = \frac{z^6 + 2}{(z^2 - 2z + 1)(z^2 - 1)}.$$

Man schreibt die Partialbruchzerlegung von $f$ wie folgt:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \frac{c_1}{(z - z_0)^3} + \frac{c_2}{(z - z_0)^2} + \frac{c_3}{z - z_0} + \frac{c_4}{z - z_1} + \frac{c_5}{z - z_2}, \qquad (1)$$

mit $a_k, c_k, z_k \in \mathbb{C}$.

Beantworten Sie die folgenden Fragen ohne die Partialbruchzerlegung von $f$ und damit die $c_k$ explizit auszurechnen.

(a) Zwei Konstanten $a_k, c_k$ in (1) kann man gleich 0 nehmen. Welche?

(b) Begründen Sie, dass $a_2 = 1$.

(c) Berechnen Sie passende $z_0, z_1$ und $z_2$.

(d) Nehmen Sie $z_0$ aus (c) und zeigen Sie

$$c_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^3 f(z).$$

(e) Nehmen Sie $z_0$ aus (c) und zeigen Sie

$$c_2 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^2 \left( f(z) - \frac{c_1}{(z - z_0)^3} \right).$$

**Aufgabe 7** (1 + 1 + 2 Punkte)**:** Konvergieren die folgenden Folgen?

(a) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}$,

(b) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k^3} + \frac{2}{k^2} + \frac{3}{2k} \right)$,

(c) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \left| \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{\lfloor k/4 \rfloor} i^k \right|$.

**Aufgabe 8:** Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge (nach 0 konvergierende Folge). Zeigen Sie, dass eine Teilfolge $\{a_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, sodass die Reihe $\{\sum_{i=0}^{n} a_{k_i}\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

**Aufgabe 9:** Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wenn die Reihe

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n} a_{2k} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie diese Aussage.