Prof. Dr. Guido Sweers
Erik Faulhaber

WS 2022/23

Analysis 1

Übungsblatt 8

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 08.12., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**:** Zeigen Sie, dass die Reihe $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert. Nutzen Sie dabei nicht das Majorantenkriterium.
Hinweis: Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von a_n.

Aufgabe 2: Sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte komplexe Folge. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{2^n}$$

konvergiert.

Aufgabe 3: Seien $\{\sum_{k=0}^{n} a_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{\sum_{k=0}^{n} b_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergente Reihen. Zeigen Sie, dass auch die Reihe

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} \sqrt{|a_k b_k|}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

absolut konvergiert.

Aufgabe 4: Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die sich in die disjunkten Teilfolgen

$$\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_{k_n} = \frac{1}{n}$$

und

$$\{a_{\ell_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_{\ell_n} = -\frac{1}{2n}$$

zerlegen lässt. Das bedeutet, dass $\mathbb{N} = \{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{a_{\ell_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Finden Sie eine solche Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(b) Finden Sie eine solche Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

Aufgabe 5 (0 + 2 + 0 + 0 + 0 Punkte)**:** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4+i}{3-4i}\right)^{3n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^6}{2^n}$.

Aufgabe 6 (3 Punkte)**:** Berechnen Sie den Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^n.$$

Aufgabe 7 (1 + 2 + 2 Punkte)**:** Untersuchen Sie die folgende Reihe.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+4(-1)^n}$$

(a) Konvergiert die Reihe absolut?

(b) Gelten die Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums?

(c) Konvergiert die Reihe?

Aufgabe 8 (2 + 2 + 2 Punkte)**:** Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ die folgenden Reihen konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n}-1)x^n$.

Hinweis: Betrachten Sie bei der Aufgabe (c) zuerst $x = \pm 1$.

Aufgabe 9: Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ habe den Konvergenzradius R. Sei $p \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^p a_n z^n$$

denselben Konvergenzradius R hat.

Die Fachschaft lädt alle Studierenden zu den folgenden Veranstaltungen ein:

Am Dienstag, dem 13.12., treffen wir uns um 18:00 Uhr am Weihnachtsmarkt St. Aposteln (Nähe Neumarkt) zu einer Weihnachtsmarkttour.

Am Samstag, dem 17.12., findet das erste Mal seit Corona wieder unsere legendäre Weihnachtsfeier statt.
Start ist um 17:47 Uhr im Efferino in der Hahnenstraße 25 in Hürth.