Prof. Dr. Guido Sweers
Erik Faulhaber **WS 2022/23**

Analysis 1

Übungsblatt 9

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 15.12., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1 (5 Punkte)**:** Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{für } x \leq 0, \\ p(x) & \text{für } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{für } x \geq 1, \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} p(x) & \text{für } x \leq 2, \\ -x & \text{für } x > 2, \end{cases}$$

wobei p ein Polynom von Grad 2 ist. Bestimmen Sie p derart, dass sowohl f als auch g stetig sind. Skizzieren Sie die Graphen von f und g.

Aufgabe 2 ($2+2+2$ Punkte)**:** (a) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$|\exp(x) - 1| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x|^k = \frac{|x|}{1-|x|}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in 0 ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.
Hinweis: $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Aufgabe 3: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f stetig auf $\mathbb{R}$ ist, falls f stetig in 0 ist.

Aufgabe 4 ($2+2+2$ Punkte)**:** Sei die Funktion f definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < \pi, \\ 1 & \text{für } |x| \geq \pi. \end{cases}$$

(a) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig?

(b) Ist $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ stetig?

(c) Ist $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ stetig?

Aufgabe 5: Wir betrachten die Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{4n} (-x)^k.$$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte oder zeigen Sie, dass der Grenzwert nicht existiert.

(a) $\lim\limits_{x \downarrow 1} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$,

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \downarrow 1} f_n(x)$,

(c) $\lim\limits_{x \uparrow 1} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$.

(d) $\lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \uparrow 1} f_n(x)$.

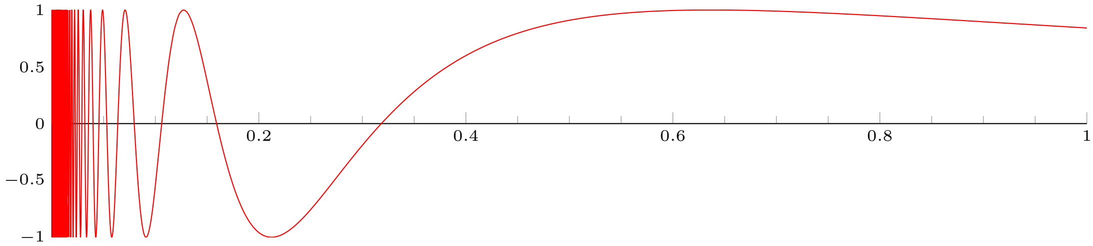
Aufgabe 6 (5 Punkte)**:** Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf I, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in I\colon |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ auf $I = (0, 1)$.

(a) Ist f stetig auf I?

(b) Ist f gleichmäßig stetig auf I?



Aufgabe 7: Sind die folgenden Funktionen stetig oder sogar gleichmäßig stetig?

(a) $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$,

(b) $f\colon (1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$,

(c) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2$,

(d) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \sqrt{|x|}$.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Die Fachschaft lädt alle Studierenden zu den folgenden Veranstaltungen ein:

Am Dienstag, dem 13.12., treffen wir uns um 18:00 Uhr am Weihnachtsmarkt St. Aposteln (Nähe Neumarkt) zu einer Weihnachtsmarkttour.

Am Samstag, dem 17.12., findet das erste Mal seit Corona wieder unsere legendäre Weihnachtsfeier statt.
Start ist um 17:47 Uhr im Efferino in der Hahnenstraße 25 in Hürth.