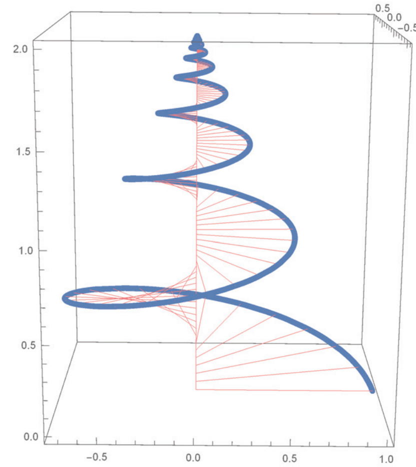
NAME: AUFGABE 1

Berechnen Sie die Kurvenlänge von $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ für

$$f(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos(t) \\ e^{-t}\sin(t) \\ 2 - 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$



NAME: AUFGABE 2

Sei $A \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(i) Wie definiert man $\exp(tA)$?

(ii) Für eine bestimmte Matrix $A \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ gilt

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{3t}(\cos(t) - \sin(t)) & 2e^{3t}\sin(t) \\ -e^{3t}\sin(t) & e^{3t}(\cos(t) + \sin(t)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 2t + t^2 - \frac{4}{3}t^3 - \frac{17}{6}t^4 + \mathcal{O}(t^5) & 2t + 6t^2 + \frac{26}{3}t^3 + 8t^4 + \mathcal{O}(t^5) \\ -t - 3t^2 - \frac{13}{3}t^3 - 4t^4 + \mathcal{O}(t^5) & 1 + 4t + 7t^2 + \frac{22}{3}t^3 + \frac{31}{6}t^4 + \mathcal{O}(t^5) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A und A^3.

Name:	Aufgabe 3	

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass diese Funktion stetig ist auf ganz $\mathbb{R}^2$.

Name:	Aufgabe 4	

Wir betrachten nochmals die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(i) Berechnen Sie $\nabla f(0,0)$.

(ii) Ist die Funktion f differenzierbar in $(0,0)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Name: Aufgabe 5

Das arithmetische Mittel zweier Zahlen wird definiert durch

$$M_{\text{arith}}(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

Das harmonische Mittel zweier positiver Zahlen wird definiert durch

$$\frac{1}{M_{\text{harm}}(x_1, x_2)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right).$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

$$M_{\text{harm}}(x_1, x_2) \leq M_{\text{arith}}(x_1, x_2) \qquad \text{für alle } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Name: Aufgabe 6

Berechnen Sie das Maximum von $f(x, y, z) = x^2 y e^z$ auf

$$B = \left\{(x, y, z)\,; x^2 + y^2 + z^2 = 4\right\}.$$

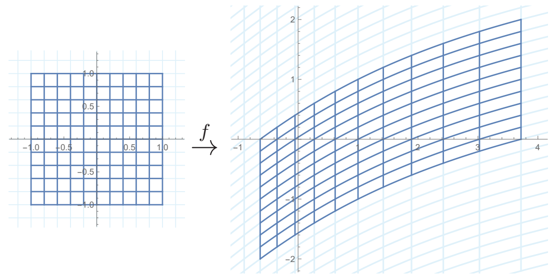
NAME: AUFGABE 7

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine invertierbare Funktion derart, dass f und $g := f^{\text{inv}}$ differenzierbar sind.

(i) Beweisen Sie, dass für $(u, v) = f(x, y)$ gilt:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial g_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial g_2(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} .$$

Wir nehmen ab hier $f(x, y) = (x + e^x, x + y)$.



(ii) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Inverse $g := f^{\text{inv}}$ hat.

(iv) Berechnen Sie für $g_1(u, v)$ die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial u} g_1(1, 0)$ und $\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u} g_1(1, 0)$.

NAME: AUFGABE 8

Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < x < 1\}$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_D \sin(y/x)\, d(x, y)$.