Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2017**
Jan Gerdung, M.Sc.

Analysis 2

Übungsblatt 10

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 2 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss am Donnerstag, den 06.07.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \sin\left(\left(x^2 - y^2\right) \exp\left(-\left(x^2 + y^2\right)\right)\right).$$

(a) Zeige, dass $p_0 = (0, 0)$, $p_1 = (0, 1)$, $p_2 = (0, -1)$, $p_3 = (1, 0)$ und $p_4 = (-1, 0)$ stationäre Punkten sind.

(b) Zeigen Sie die folgende Ungleichungskette:

$$\left|(x^2 - y^2) \exp(-(x^2 + y^2))\right| \leq (x^2 + y^2) \exp(-(x^2 + y^2)) \leq \max_{t \geq 0}\{te^{-t}\} \leq \frac{1}{e} < \frac{\pi}{2}.$$

(c) Gibt es noch andere stationäre Stellen?

(d) Sei m die fünfte Ziffer Ihrer Matrikelnummer und sei

$$p := \begin{cases} p_m & \text{für } m < 5, \\ p_{m-5} & \text{für } m \geq 5. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Hesse-Matrix für f an der Stelle p.

(e) Hat f in p ein Minimum, ein Maximum, oder einen Sattelpunkt?

Aufgabe 2: Eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} \forall_{t \in [0,1]} \ : \ u(tx + (1-t)y) \leq tu(x) + (1-t)u(y).$$

Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ und die Hesse-Matrix von u sei positiv definit an jedem Punkt im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass u konvex ist.

Aufgabe 3: Berechnen Sie alle stationären Stellen der Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und bestimmen Sie jeweils, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

(a) $f_1(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}$

(b) $f_2(x, y) = x^2 - y^2$

(c) $f_4(x, y) = \cos(x)\cos(y)$

(d) $f_5(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Aufgabe 4 (4 Punkte): Berechnen Sie alle stationären Stellen von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x, y) = \cos(x) + \cos(y) + \cos(x + y)$ und bestimmen Sie, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

Aufgabe 5 (4 Punkte): Betrachen Sie das Polynom

$$f(x, y, z) = (x + z)\, y^2 + z^2 - 1\,.$$

Berechnen Sie die Taylorpolynome von Grad 1, 2, 3, 4 an der Stelle $(1, 0, -1)$.

Aufgabe 6 (3 Punkte): Berechnen Sie für den Multiindex $\alpha = (1, 2, 3)$ und für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

die Ableitung $(\partial^\alpha f)(x_1, x_2, x_3)$.

Aufgabe 7: Sei $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = m$. Für $\beta \in \mathbb{N}^n$ definieren wir

- $\beta \leq \alpha$ durch $\beta_k \leq \alpha_k$ für alle $k = 1, \dots, n$ und
- $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \dots, \alpha_n - \beta_n)$.

Weiter seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei m-mal stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha,\, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!\beta!} \left(\partial^\beta f\right) \left(\partial^{\alpha-\beta} g\right)$$

Aufgabe 8 (2+1+1 Punkte): Sei $a = (-1, 0)$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f(x, y) = x^3 e^y$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom erster Ordnung bei a.

(b) Bestimmen Sie den Restterm von Lagrange $R_{1,a}(x, y)$.

(c) Bestimmen Sie für $b = (1, 0)$ ein zugehöriges $\xi \in [a, b]$, sodass

$$R_{1,a}(b) = \frac{1}{2} \left((b - a) \cdot \nabla\right)^2 f(\xi)\,.$$