Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.

SoSe 2017

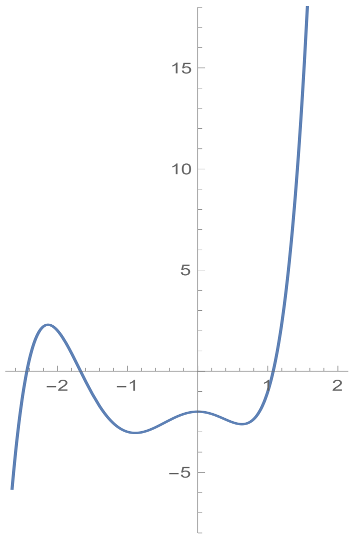
Analysis 2

Übungsblatt 11

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 2 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss am Donnerstag, den 13.07.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Wir betrachten das Polynom

$$p(x) = x^5 + 3x^4 - 3x^2 - 2\,.$$



(a) Zeigen Sie, dass p im Intervall $[0,2]$ eine Nullstelle hat.

(b) Führen Sie die erste Iteration des Newton-Verfahren mit dem Anfangswert $x_0 = 1$ durch.

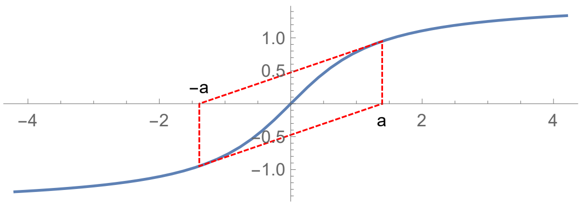
(c) Wieso sollte man nicht $x_0 = 0$ als Startwert wählen?

(d) Überlegen Sie sich mit Hilfe der Zeichnung, gegen welche Nullstelle das Newton-Verfahren für den Startwert $x_0 = 0,3$ bzw. $x_0 = -0,5$ konvergiert.

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte): Das Newton-Verfahren für $\arctan(x) = 0$, das heißt

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i),$$

konvergiert nur, wenn x_0 nahe bei 0 gewählt wird.



(a) Zeigen Sie, dass es ein $a \in \mathbb{R}^+$ gibt derart, dass für $x_0 = a$ die Folge $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ periodisch ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $x_0 > a$ die Folge $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ divergiert.

(c) Zeigen Sie, dass für $x_0 \in (0, a)$ die Folge $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ konvergiert.

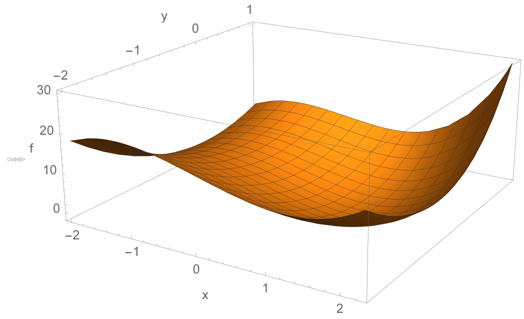
(d) Geben Sie ein Verfahren an, das a approximiert.

Aufgabe 3: (a) Zeigen Sie, dass für eine symmetrische Matrix $M \in \mathrm{M}^{2\times 2}(\mathbb{R})$ gilt, dass $\|M\| = \max\{|\lambda_1|\ ,\ |\lambda_2|\}$, wobei λ_1 und λ_2 die beiden Eigenwerte von M sind.

(b) Bestimmen Sie die Norm der jeweiligen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (6 Punkte): Wir wollen die stationären Stellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch



$$f(x, y) = x^3 - 5x + 4y^2 + e^{x+y}$$

approximieren.

(a) Hat f ein globales Minimum oder Maximum?

(b) Berechnen Sie $H_f(x, y)$ und $\det(H_f(x, y))$.

(c) Beschreiben Sie, wie man stationäre Stellen von f approximieren kann.

(d) Geben Sie einen expliziten Algorithmus für ein Approximierungsverfahren.

(e) Ein solches Verfahren ergibt

$$\hat{x} = -1.25493..., \ \hat{y} = -0.0344308...$$

und

$$f(\hat{x}, \hat{y}) = 4.57851..., \ \ \det(H_f(\tilde{x}, \tilde{y})) = -60.1071... \, .$$

Ist $(\hat{x}, \hat{y})$ ein Minimum, ein Maximum oder ein Sattelpunkt?

(f) Mit einem anderen Startpunkt findet man

$$\tilde{x} = 0.987837..., \ \tilde{y} = -0.259066...$$

und

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}) = -1.63424..., \ \det(H_f(\tilde{x}, \tilde{y})) = 76.2804... \, .$$

Ist $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ein Minimum, ein Maximum oder ein Sattelpunkt?

Aufgabe 5: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass f genau dann eine Kontraktion ist, wenn es ein $\theta \in (0, 1)$ gibt, so dass $|f'(x)| \leq \theta$ auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 6 (0+2+2 Punkte): Prüfen Sie, ob die jeweilige Funktion eine Kontraktion ist.

(a) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ mit $f(x) = \ln(x + 1) - x + 1$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(x)}{2}$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = \left(\dfrac{x + y}{2}, \dfrac{x - y}{2}\right)$

Aufgabe 7 (2+0 Punkte): Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(a) Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ eine Umgebung $B_r(a, b)$ gibt, für die $f_{|B_r(a,b)} : B_r(a, b)$ umkehrbar ist.

(b) Wieso ist $f_{|B_r(0,0)}$ für kein $r > 0$ umkehrbar? Hat $f_{|\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ eine Inverse?