Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.

SoSe 2017

Analysis 2

Übungsblatt 12

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 2 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss am Donnerstag, den 20.07.2017, um 12 Uhr.

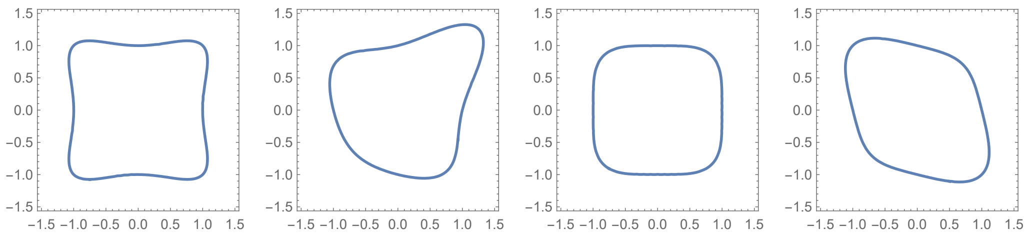
Aufgabe 1: Finden Sie heraus, welche Skizze zu welcher Gleichung gehört.

(a) $x^4 + y^4 = 1$

(b) $x^4 + xy + y^4 = 1$

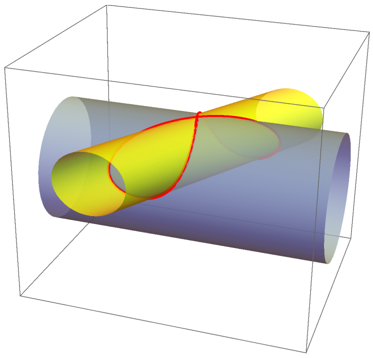
(c) $x^4 - x^2y^2 + y^4 = 1$

(d) $x^4 - xy\,(x+y) + y^4 = 1$



Aufgabe 2 (3+3 Punkte): Wir betrachten die Schnittmenge der Zylinder

$$Z_1 = \left\{(x,y,z)\,; y^2 + z^2 = 4\right\}$$
$$Z_2 = \left\{(x,y,z)\,; \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}x + \tfrac{1}{2}y\right)^2 + (z-1)^2 = 1\right\}.$$



(a) Kann man diese Schnittmenge in einer Umgebung von $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -2, 0\right)$ lokal schreiben als

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = g\,(x)$$

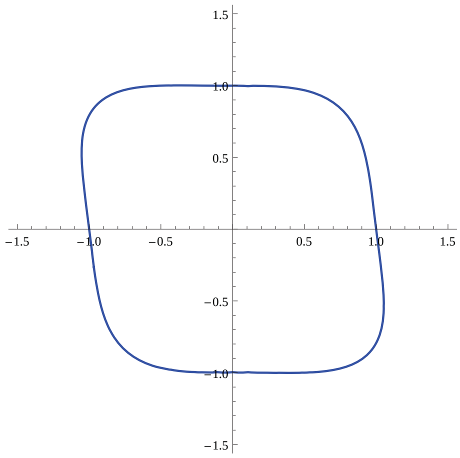
mittels einer Funktion $g : \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - \varepsilon, \frac{2}{3}\sqrt{3} + \varepsilon\right) \to \mathbb{R}^2$?

(b) Kann man diese Schnittmenge in einer Umgebung von $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -2, 0\right)$ lokal schreiben als

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = g\,(y)$$

mittels einer Funktion $g : (-2-\varepsilon, -2+\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$?

Aufgabe 3 (4+4 Punkte): Die Menge



$$W := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 y + y^4 = 1\right\}$$

kann man mittels zweier Funktionen $f_1 \geq f_2$ beschreiben:

$$W = \{(x, f_1(x)); x_0 \leq x \leq x_1\} \cup \{(x, f_2(x)); x_0 \leq x \leq x_1\}.$$

(a) Berechnen Sie x_0 und x_1.

(b) Die Punkte $(0,1)$ und $(\frac{1}{2},-1)$ liegen in der Menge W.
Berechnen Sie $f_1'(0)$ und $f_1''(0)$ und ebenso $f_2'(\frac{1}{2})$ und $f_2''(\frac{1}{2})$.

Aufgabe 4 (6 Punkte): Berechnen Sie das Maximum der Funktion $f(x,y,z) = (x+y)z$ auf der Einheitssphäre

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Aufgabe 5:

(a) Berechnen Sie das Maximum der Funktion $f(x,y) = x^4 + y^4$ auf der Menge

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

(b) Berechnen Sie das Minimum und das Maximum von der Funktion

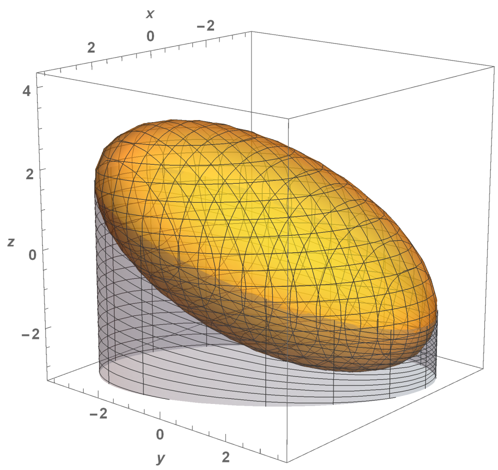
$$f(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 \text{ auf } K = \left\{(x,y,z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie den Rand und das Innere von K getrennt.

Aufgabe 6: Wir betrachten $C = \{(x,y,z); x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 = 6\}$.

(a) Berechnen Sie den höchsten Punkt von C, gemeint ist damit die Stelle $(x_m, y_m, z_m) \in C$ mit maximaler z-Koordinate:

$$z_m = \max\{z; (x,y,z) \in C\}.$$



(b) Begründen Sie, warum man bei Stellen aus der Menge

$$R = C \cap \left\{(x,y,z); z = -\tfrac{1}{2}y\right\}$$

die Menge C lokal nicht durch $z = g(x,y)$ für eine Funktion g beschreiben kann.

(c) Berechnen Sie das Gebiet $P := \left\{(x,y);\ \text{es gibt } z \in \mathbb{R} \text{ mit } (x,y,z) \in C\right\} \subset \mathbb{R}^2$.