Einige Aufgaben zu mehrdimensionalen Integralen

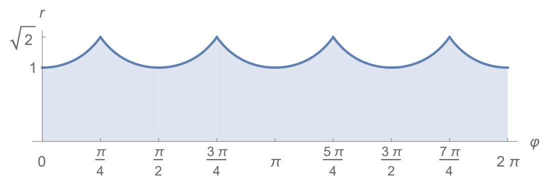
1. Für $r \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}^2$ definiert man $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x-a\| < r\}$. Zerlegen Sie $C = B_3(0,0) \setminus \overline{B_1(0,1)}$ in zwei offene Teilgebiete G_1 und G_2 derart, dass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
   (a) $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ und $\overline{G_1 \cup G_2} = \overline{C}$;
   (b) $G_1 = \{(x_1, x_2); \psi_u(x_1) < x_2 < \psi_o(x_1)\}$ für geschickte Funktionen ψ_u und ψ_o;
   (c) $G_2 = \{(x_1, x_2); \varphi_u(x_1) < x_2 < \varphi_o(x_1)\}$ für geschickte Funktionen φ_u und φ_o.

2. Berechnen Sie

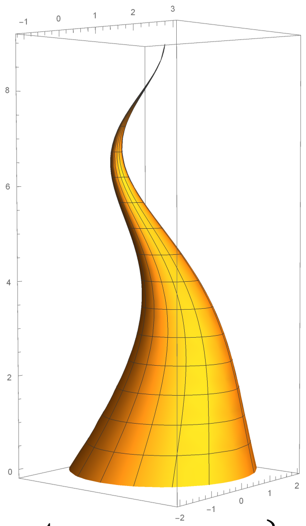
$$i) \int_{1<x^2+y^2<4} \frac{1}{x^2+y^2} d(x,y) \quad \text{und} \quad ii) \int_{1<x^2+y^2+z^2<4} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} d(x,y,z).$$

3. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\min\left(\frac{1}{|\sin\varphi|}, \frac{1}{|\cos\varphi|}\right)} r\,dr\,d\varphi = 4.$$



Hinweis: Benutzen Sie keine Polarkoordinaten.



4. Sei $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < x < 1\}$. Berechnen Sie

$$\int_G \left(\frac{y}{x}\right)^2 \exp\left(x^2\right) d(x,y).$$

5. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{0<x<y<z<1} x \; d(x,y,z)$.

6. Das Innere eines Zauberhutes ist definiert durch

$$H = \left\{(x,y,z); \left(x - \cos\left(\tfrac{2}{27}z^2\right)\right)^2 + \left(y - \sin\left(\tfrac{1}{3}z\right)\right)^2 < 4\left(\tfrac{1}{9}z - 1\right)^4 \text{ und } 0 < z < 9\right\}.$$

Berechnen Sie das Volumen. Hinweis: Cavalleri.

7. Berechnen Sie das Volumen von

$$R = \left\{(x,y,z); 1 < z\sqrt{x^2+y^2} < 2 \text{ und } z < \sqrt{x^2+y^2} < 2z\right\}.$$

Eine Skizze steht nebenan.

Hinweis: verwenden Sie die Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{uv}\cos\varphi, \\ y &= \sqrt{uv}\sin\varphi, \\ z &= \sqrt{u/v}. \end{aligned}$$