Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.

SoSe 2017

Analysis 2

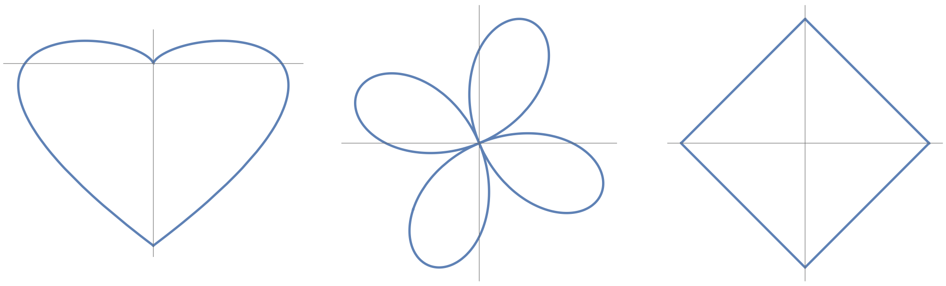
Übungsblatt 2

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 2 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 04.05.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (2 Punkte): Welche Spur gehört zu welcher Kurve?

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad h : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) - \cos(3t) \\ \sin(3t) - \cos(t) \end{pmatrix} \qquad g(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)\,|\cos(t)| \\ \sin(t)\,|\sin(t)| \end{pmatrix} \qquad h(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t^5 \\ \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t^4 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 2: Es sei die folgende Kurve $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ gegeben:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(t)\,|\cos(t)| \\ \sin(t)\,|\sin(t)| \end{pmatrix}$$

(a) Ist f glatt?

Wir betrachten nun nur den Teil $f : [\frac{\pi}{2}, \pi] \to \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie

(b) die Umparametrisierung auf Bogenlänge und

(c) die Krümmung.

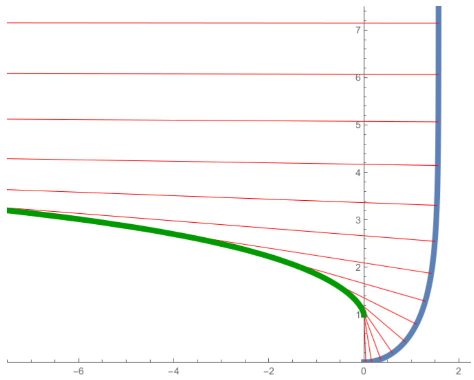
Aufgabe 3 (3+3 Punkte): Die Kurve $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^4$ sei gegeben durch

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Bogenlänge und die auf Bogenlänge umparametrisierte Kurve.

(b) Berechnen Sie Krümmung, Hauptnormalenvektor und Evolute.

Aufgabe 4: Es sei die folgende Kurve gegeben $f : [0,1) \to \mathbb{R}^2$:



$$f(t) = \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ -\ln\left(\sqrt{1-t^2}\right) \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Umparametrisierung auf Bogenlänge $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ wie folgt gegeben ist:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \arcsin\left(\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\right) \\ -\ln\left(\frac{2e^t}{e^{2t}+1}\right) \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve.

(c) Bestimmen Sie den Hauptnormalenvektor und die Evolute der Kurve.

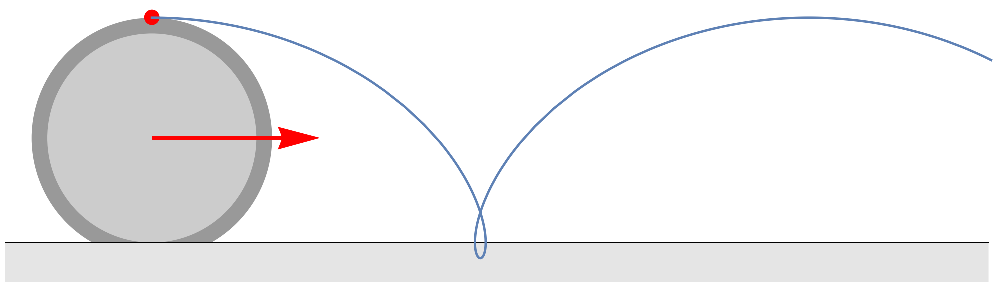
Aufgabe 5: Die Kurve $f : [0,3] \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{2}{3}t^{3/2} \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Bogenlänge.

(b) Berechnen Sie die Krümmung.

Aufgabe 6 (4 Punkte): Berechnen Sie die Evolute zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7 (4 Punkte): Ein Zugrad bewegt sich wie im Bild mit konstanter Geschwindigkeit v nach rechts. R_1 bezeichne den Innenradius (Lauffläche des Rads) und R_2 den Außenradius.



Bestimmen Sie die Kurve des roten Flecks am Rand des Rades in Abhängigkeit von der Zeit t, wobei der Fleck bei $t = 0$ wie im Bild oben steht.

Aufgabe 8 (4 Punkte): Die Kurve $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$z(t) = \begin{pmatrix} t + \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

heißt Zykloide. Beweisen Sie, dass die Evolute dieser Zykloide eine verschobene Zykloide ist (mit Ausnahme der singulären Stellen).