Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.

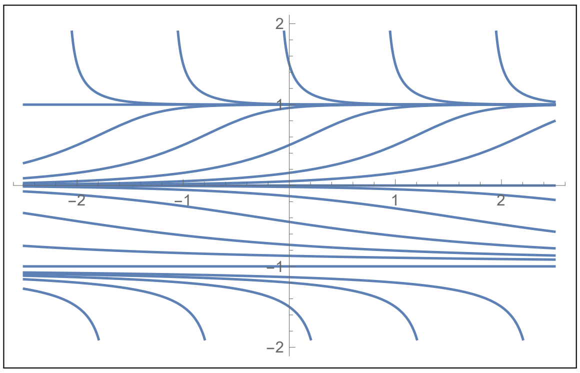
SoSe 2017

Analysis 2

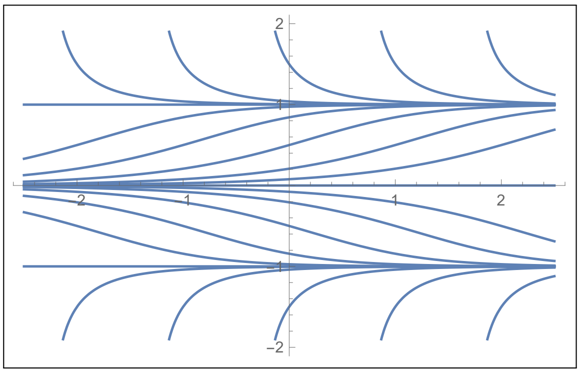
Übungsblatt 3

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 2 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 11.05.2017, um 12 Uhr.

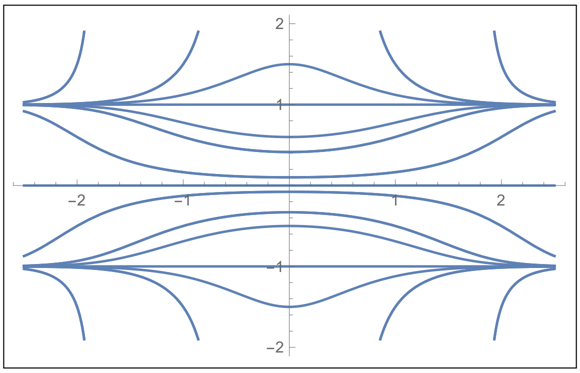
Aufgabe 1 (3 Punkte): Welche Lösungsskizze gehört zu welcher Differentialgleichung?



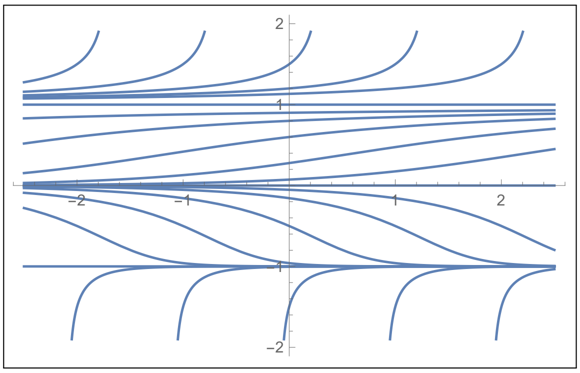
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

(a) $x'(t) = (1 - x(t))(1 + x(t))\, x(t)$ (b) $x'(t) = t\,(1 - x(t))(1 + x(t))\, x(t)$
(c) $x'(t) = \left(1 - x(t)^2\right)(1 + x(t))\, x(t)$ (d) $x'(t) = (1 - x(t))^2 (1 + x(t))\, x(t)$

Aufgabe 2: Prüfen Sie jeweils, ob die Differentialgleichung linear ist.
(a) $u'(x) = f(x)\, u(x)$, (b) $t'(x) = t(x) + x^2$,
(c) $v''(t) + v'(t) + v(t) = v(t)^2$, (d) $a''(s) = \exp(a(s))$.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Berechnen Sie die Lösungen von
(a) $a'(x) = 2a(x) + x$, (b) $b'(x) = b(x) + xe^{2x}$.
Wir erlauben nun auch Funktionen als Lösung, die differenzierbar sind mit Ausnahme von einzelnen Stellen, die jedoch überall stetig sind. Berechnen Sie dann die Lösungen von:
(c) $c'(x) = -\mathrm{sign}(c(x) - x)$, (d) $d'(x) = 1 - 2\,\mathrm{sign}(d(x))$.

Aufgabe 4 (1+1+2+1 Punkte): Wir betrachten die Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(2t) & 4e^t \sin(2t) \\ -\frac{1}{4}e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $A(t)\,A(s) = A(t+s)$ gilt für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie $A(0)$ und $A'(0)$.

(c) Sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\vec{x}(t) = A(t)\,\vec{x}_0$ eine Lösung ist von

$$\vec{x}'(t) = A'(0)\,\vec{x}(t) \text{ mit } \vec{x}(0) = \vec{x}_0. \tag{1}$$

(d) Folgern Sie aus $\frac{d}{dt}\left(A(-t)\,\vec{x}(t)\right) = \binom{0}{0}$, dass (1) nur diese eine Lösung hat.

Aufgabe 5 (3+3+1+1 Punkte): Berechnen Sie:

(a) für $t \in \mathbb{R}$

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \exp\left(t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) \text{ und } \exp\left(t\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right);$$

(b) für $t \in \mathbb{R}$

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \text{ und } \exp\left(t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right);$$

(c) $[A;B] := AB - BA$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

(d) $[A;B]$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6: Welche homogene lineare Differentialgleichung erfüllt

$$\vec{x}(t) = \exp\left(\ln(t)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ für } t > 0?$$

Beweisen Sie Ihre Antwort. Geben Sie auch ein Anfangswertproblem für diese Funktion.

Aufgabe 7: Beweisen Sie Lemma 3.18 aus dem Skript: Sei $A, B \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\forall_{s,t\in\mathbb{R}} : e^{tA+sB} = e^{tA}e^{sB}$$

genau dann, wenn

$$AB = BA.$$