**Prof. Dr. Guido Sweers**
**Jan Gerdung, M.Sc.**

**SoSe 2017**

# Analysis 2

## Übungsblatt 4

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 2 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 18.05.2017, um 12 Uhr.

**Aufgabe 1:** Sei $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\exp(tA_k)$ für

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$ (b) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

**Aufgabe 2 (0+3 Punkte):** Berechnen Sie die Lösungen der Differentialgleichungen

(a) $x'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} x(t)$ , mit $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

(b) $y'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} y(t)$ , mit $y(1) = \begin{pmatrix} e^4 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 3 (2+2+2+2+2 Punkte):** Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A$.

(b) Ermitteln Sie eine invertierbare Matrix $T \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$, so dass $T^{-1}AT$ eine Jordan-Matrix ist.

(c) Berechnen Sie $\exp(tA)$.

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$.

(e) Prüfen Sie, ob das System $x'(t) = Ax(t)$ stabil ist. Falls ja, prüfen Sie auch, ob das System asymptotisch stabil ist.

**Aufgabe 4:** Es sei $A$ eine Matrix und $v \neq 0$ ein Vektor, so dass $A^2 v = v$ und $Av \neq -v$. Zeigen Sie, dass das homogene System $x'(t) = Ax(t)$ instabil ist.

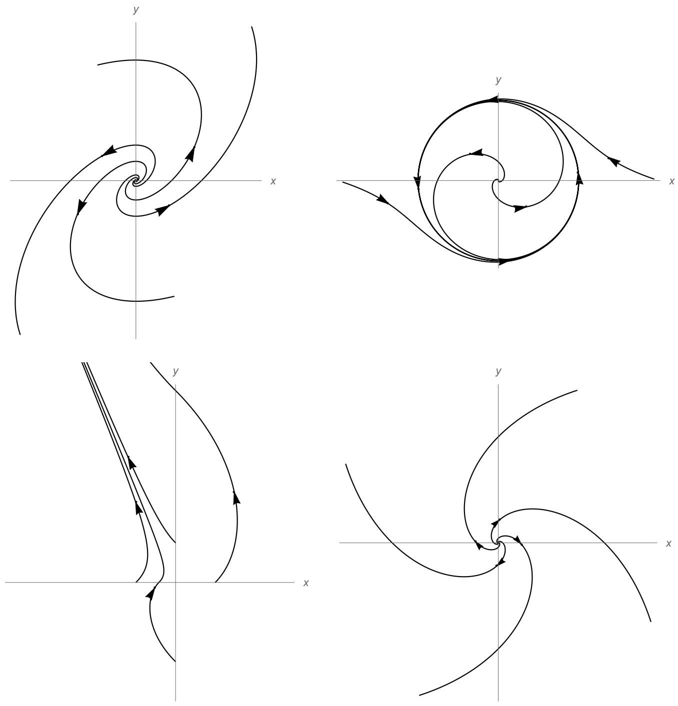
**Aufgabe 5 (4 Punkte):** Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{cases} x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} & \text{für } t \geq 0 \\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

**Aufgabe 6 (3 Punkte):** In den Bildern sind Lösungskurven $(x\,(t)\,, y\,(t))$ der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x'\,(t) \\ y'\,(t) \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x\,(t) \\ y\,(t) \end{pmatrix}$$

für vier verschiedene Funktionen $f$ skizziert. Ordnen Sie die Bilder den dazugehörigen Funktionen zu:



(a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x^2-y^2)\,x - y \\ x + (1-x^2-y^2)\,y \end{pmatrix}$

(b) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x \end{pmatrix}$

(c) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$

(d) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x|-|y| \\ |x|+|y| \end{pmatrix}$

**Aufgabe 7:** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$y'(t) = f(y(t)) \text{ für alle } t \in (a,b).$$

Zeigen Sie, dass $y$ entweder monoton steigend oder monoton fallend ist.

*Hinweis: Eine mögliche Beweisskizze:*

- Nehmen Sie an, dies wäre nicht so. Dann gibt es $s_1, s_2 \in (a,b)$, so dass $y'(s_1) > 0$ und $y'(s_2) < 0$. Sie dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $s_1 < s_2$ und $y(s_1) \geq y(s_2)$.
- Zeigen Sie, dass es ein kleinstes $s_3 \in (s_1, s_2)$ gibt, mit $y(s_1) = y(s_3)$. Konstruieren Sie damit einen Widerspruch.