Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc. **SoSe 2017**

Analysis 2

Übungsblatt 5

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 2 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Aufgrund des Feiertags (Christi Himmelfahrt) ist **Abgabeschluss bereits am Mittwoch, den 24.05.2017, um 15 Uhr**.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Berechnen Sie alle Lösungen für:

(a) $y^{(10)}(x) - 2y^{(6)}(x) + y''(x) = \exp(x)$;

(b) $y^{(10)}(x) - 2y^{(6)}(x) + y''(x) = x$;

(c) $y^{(10)}(x) - 2y^{(6)}(x) + y''(x) = x^3$;

(d) $y^{(10)}(x) - 2y^{(6)}(x) + y''(x) = \sin(x)$.

Aufgabe 2: Von welchem Typ sind die folgenden Differentialgleichungen?

(a) $a'(x)\,a(x)\,(x^2+1) = e^x$;

(b) $b'(x) + b(x) + (x^2+1) = e^x$;

(c) $c'(x) + x + \left(c(x)^2 + 1\right) = e^x$;

(d) $a'(x)\,(x^2+1) = e^{x+a(x)}$.

Geben Sie auch die zugehörigen Lösungsansätze an.

Aufgabe 3: Sind die folgenden Differentialgleichungen trennbar?

(a) $x'(t) = \exp(tx(t))$

(b) $x'(t) = \exp(t + x(t))$

(c) $x'(t) = \min\left\{\frac{x^2(t)}{t^2}, t^2, t^{-2}, t^2x^2(t))\right\}$

(d) $x'(t) = \ln(x(t)) - tx(t)$

Aufgabe 4 (1+1+2+2 Punkte): Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

(a) $\begin{cases} x'(t) = -x^2(t)\,t^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t}{2x(t)} + \dfrac{x(t)}{t} \quad \text{für } t \geq 1 \\ x(1) = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x'(t) = t\,x(t) - t\,x^3(t) \\ x(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + x^2(t) - e^{2t} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

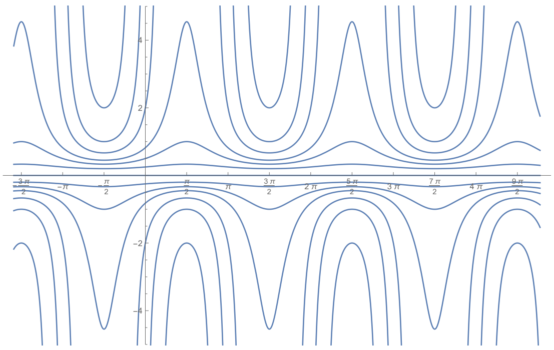
Aufgabe 5 (4 Punkte): Finden Sie eine Lösung und zeigen Sie, dass es die einzige Lösung ist:

$$u'(t) = \left(1+t^2\right) u(t) + \exp\left(\frac{1}{3}t^3\right) \quad \text{mit } u(0) = 1.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\left(\exp\left(-t-\frac{1}{3}t^3\right) u(t) + \exp(-t)\right)' = 0$ *für jede Lösung gilt.*

Aufgabe 6 (5 Punkte): Wir betrachten die DGL

$$x'(t) = x(t)^2 \cos(t).$$



Skizze einiger Lösungen

Welche Behauptungen sind richtig?

(a) Für $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ ist $x : (\alpha, \pi-\alpha) \to \mathbb{R}$ mit $x(t) = \frac{1}{\sin(\alpha)-\sin(t)}$ eine Lösung dieser Gleichung mit maximalem Existenzintervall.

(b) Für $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ ist $x : (-\pi-\alpha, \alpha) \to \mathbb{R}$ mit $x(t) = \frac{1}{\sin(\alpha)-\sin(t)}$ eine Lösung dieser Gleichung mit maximalem Existenzintervall.

(c) Alle Lösungen dieser Gleichung haben die Vorschrift $x(t) = \frac{1}{c-\sin(t)}$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

(d) Alle Lösungen dieser Gleichung haben die Vorschrift $x(t) = \frac{c}{1-c\sin(t)}$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

(e) Alle Lösungen dieser Gleichung, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, kann man schreiben mittels $x(t) = \frac{1}{c-\sin(t)}$ für ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|c| > 1$.

Aufgabe 7:

Die Funktion $\operatorname{erf} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\, n!} x^{2n+1}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-t^2\right) dt$.

(b) Finden Sie eine Lösung von $u'(t) = 2t\, u(t) + 1$ mit Hilfe dieser Funktion.

(c) Man definiert $\operatorname{erfi}(x) := -i\operatorname{erf}(ix)$. Finden Sie eine Lösung von $u'(t) = -2t\, u(t) + 1$.

Aufgabe 8: (a) Zeigen Sie, dass die $\{\mathcal{A}_c\}_{c\in\mathbb{R}}$ und $\{\mathcal{B}_c\}_{c\in\mathbb{R}^+}$ welche durch

$$\mathcal{A}_c = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y = cx^2\right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_c = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 2y^2 + x^2 = c\right\}$$

definiert sind, orthogonale Familien von Trajektorien sind.

(b) Geben Sie eine Familie von Trajektorien $\{\mathcal{B}_c\}$ an, so dass $\{\mathcal{B}_c\}$ und $\{\mathcal{A}_c\}_{c\in\mathbb{R}^+}$, definiert durch

$$\mathcal{A}_c = \left\{(x,y) \,;\, y^3 + x + \frac{x^3}{3} = c\right\},$$

orthogonale Familien von Trajektorien sind.