Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2017**
Jan Gerdung, M.Sc.

Analysis 2

Übungsblatt 6

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 2 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 01.06.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (0+0+2+0+2 Punkte): Geben Sie, sofern möglich, eine kleinste offene und eine kleinste abgeschlossene Menge an, die die folgende Menge enthält.

(a) in $\mathbb{R}$: $\left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$;

(b) in $\mathbb{R}$: $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}; 2^{-2n} < x < 2^{1-2n}\}$;

(c) in $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q} \cap (0,1)$;

(d) in $\mathbb{R}$: $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (q_n - 2^{-n-3}, q_n + 2^{-n-3})$, wobei $\{q_n; n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$ ist.

(e) in $\mathbb{R}^2$: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{2^{-n}}\left(\frac{1}{n}, 0\right)$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie $\overline{A}$, A° und ∂A in $\mathbb{R}^2$ für

$$A = \left(B_1(0,0) \cap \left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\right)\right) \cup \left\{\left(0, \frac{2n}{n+m}\right); n, m \in \mathbb{N}^+\right\}.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte): Zeigen Sie für $A \subset \mathbb{R}^n$: $\partial A = \overline{A} \setminus A^o = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \partial A^c$

Aufgabe 4 (4+4 Punkte): Ist die folgende Funktion f stetig auf $\mathbb{R}^2$?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \text{ für } x^2 + y^2 \neq 0.$$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = \frac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \text{ für } x^2 + y^2 \neq 0.$$

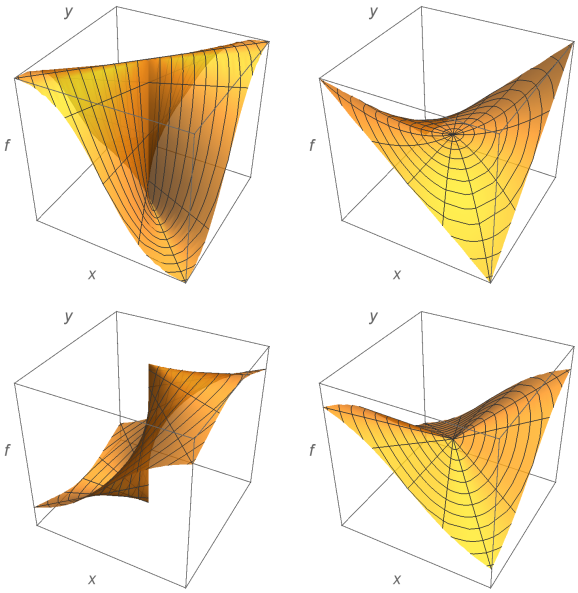
Aufgabe 5: Es sei $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x + y \neq 0\}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ definiert durch

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y + xy^2}{x^3 + y^3}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^3 + y^3}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x^3y^3}{x^2 + y^2}$

Überprüfen Sie jeweils, ob $\lim\limits_{A \ni (x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ existiert.

Aufgabe 6 (3 Punkte): Rechts sehen Sie Skizzen zu den Funktionen $f_1, \ldots, f_4$:

$$f_1(x,y) = xy$$
$$f_2(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$f_3(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$
$$f_4(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



Welches Bild gehört zu welcher Funktion? Welche Funktionen kann man in $(0,0)$ stetig fortsetzen?

Aufgabe 7: Betrachte für $p \in (0,4)$ und $f_p(x) = px(1-x)$ die Folge $\mathcal{F}_p := \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch

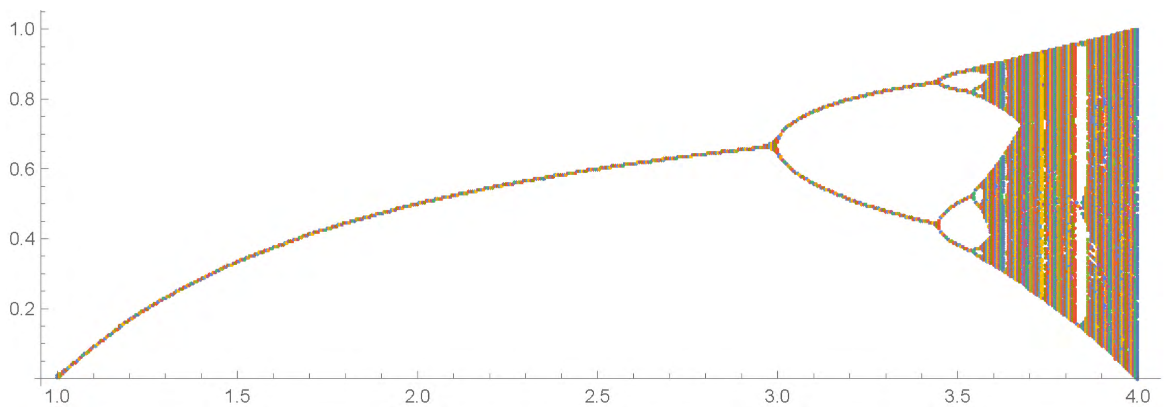
$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{10}, \\ x_{n+1} = f_p(x_n) \ \text{ für } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Für $p < 1$ ist 0 der einzige Häufungspunkt von $\mathcal{F}_p$.
Dies gilt auch für $p = 1$.

(b) Für $1 < p < 3$ ist $x = 1 - \frac{1}{p}$ der einzige Häufungspunkt von $\mathcal{F}_p$.
Dies gilt auch für $p = 3$.

(c) Für $3 < p < 4$ hat $\mathcal{F}_p$ mehrere Häufungspunkte.



Häufungspunkte in Abhängigkeit von p