Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc. **SoSe 2017**

Analysis 2

Übungsblatt 7

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 2 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Aufgrund des Feiertags (Fronleichnam) ist **Abgabeschluss am Mittwoch, den 14.06.2017, um 15 Uhr**.

Aufgabe 1 (6 Punkte): Sei $f_n : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = (1 - x_1)^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_{k+1}}{k} - \frac{x_k}{k+1} \right)^2 .$$

Wir betrachten die Funktion $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass diese Funktion f auf ℓ_∞ wohldefiniert ist.

Hinweis: f ist auf ℓ_∞ wohldefiniert, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in \ell_\infty$ konvergiert.

(b) Ist diese Funktion auch auf ℓ_2 wohldefiniert? Und auf ℓ_1?

(c) Zeigen Sie, dass f ein Minimum in ℓ_∞ hat.

(d) Zeigen Sie, dass $\inf \{f(x) ; x \in \ell_1\} = 0$.

(e) Hat die Funktion f ein Minimum in ℓ_1?

(f) Hat die Funktion f ein Minimum in ℓ_2?

Aufgabe 2 (3 Punkte): Bestimmen Sie die Nullstellenmenge der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2)e^{x^2 - y^2}$$

und zeigen Sie damit, dass f mindestens 4 Extrema besitzt.

Aufgabe 3 (6 Punkte): Es seien V, W normierte Vektorräume und $f : V \to W$ eine stetige Funktion. Gilt folgendes für $A \subset V$?

(a) A ist abgeschlossen in $V \Longrightarrow f(A)$ ist abgeschlossen in W

(b) $f(A)$ ist abgeschlossen in $W \Longrightarrow A$ ist abgeschlossen in V

(c) A ist kompakt in $V \Longrightarrow f(A)$ ist kompakt in W

(d) $f(A)$ ist kompakt in $W \Longrightarrow A$ ist kompakt in V

(e) A ist zusammenhängend in $V \Longrightarrow f(A)$ ist zusammenhängend in W

(f) $f(A)$ ist zusammenhängend in $W \Longrightarrow A$ ist zusammenhängend in V

Begründen Sie Ihre Antworten und geben Sie Gegenbeispiele an, falls es nicht gilt.

Aufgabe 4: Wir betrachten ℓ_2. Zeigen Sie, dass die Teilmenge $\{x \in \ell_2 ; \|x\|_2 \le 1\}$ abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt ist.

Aufgabe 5: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.

(a) Sei $A \subset V$ mit $A \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass die Abstandsfunktion zu A

$$d(x, A) := \inf \{\|x - a\| \, ; a \in A\}$$

eine (bzgl. x) stetige Funktion ist.

Sei nun $K \subset V$ kompakt und $\{U_1, \ldots, U_m\}$ eine endliche Überdeckung von K durch offene Mengen in V. Zeigen Sie:

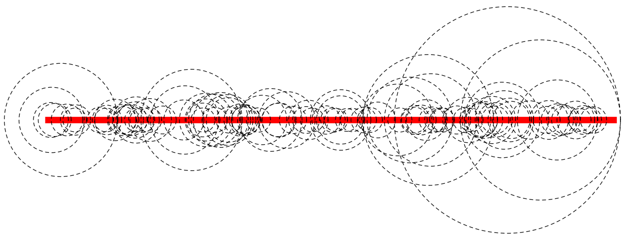
(b) Die Funktion $\tilde{d}(x) = \max\{d(x, \partial U_1); \ldots; d(x, \partial U_m)\}$ ist stetig.

(c) Es gilt $\tilde{d}(x) > 0$ für alle $x \in K$.

(d) Es gibt ein $r > 0$, sodass jede Kugel $B_r(x)$ für $x \in K$ in einer der Mengen U_i liegt.

Aufgabe 6: Die Menge $L := \{(x, 0) \, ; 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ wird überdeckt durch die offenen Kugeln $\{B_{r_i}(p_i, 0)\}_{i=1}^{\infty}$ mit $0 < p_i < 1$ und $r_i \in \mathbb{R}^+$.

Wir wollen durch Widerspruch beweisen, dass endlich viele dieser Kugeln schon für eine Überdeckung reichen.
Zeigen Sie folgende Schritte unter der Annahme, dass sich L nicht durch endlich viele $B_{r_i}(p_i, 0)$ überdecken lässt:



1. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix} \in L$ mit $\begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix} \notin \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_i}(p_i, 0)$.

2. Die Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hat eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

3. Für $x_\infty = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$ gilt $\begin{pmatrix} x_\infty \\ 0 \end{pmatrix} \in L$ und es gibt $i^* \in \mathbb{N}$ mit $\begin{pmatrix} x_\infty \\ 0 \end{pmatrix} \in B_{r_{i^*}}(p_{i^*}, 0)$.

4. Es gibt $k_0 \geq i^*$ derart, dass für $k > k_0$ gilt, dass $x_{n_k} \in B_{r_{i^*}}(p_{i^*}, 0)$.

5. Zeigen Sie, dass 4. im Widerspruch zu 1. steht.

Aufgabe 7 (5 Punkte): Für offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ sind Zusammenhang und Wegzusammenhang äquivalent. Sind die folgenden Mengen (weg)zusammenhängend?

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 < x^2(1 - x^2)\}$;

(b) $\{(0,0)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 < x^2(1 - x^2)\}$;

(c) $\left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right); 0 < x \leq 1\right\}$;

(d) $\{(0,0)\} \cup \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right); 0 < x \leq 1\right\}$.

(e) $\{(0,0)\} \cup \{(e^{-t}\cos(10t), e^{-t}\sin(10t)); t \geq 0\}$.

Begründen Sie Ihre Antworten.
Hinweis: Hier sehen Sie Bilder zu den Aufgabenteilen: