Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.

SoSe 2017

Analysis 2

Übungsblatt 8

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 2 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss am Donnerstag, den 22.06.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Geben Sie Ihre Matrikelnummer an. Sei m_k die k-te Ziffer Ihrer Matrikelnummer und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = (m_2+1)^2 x^2 + (m_4 m_3 + 2) xy + (m_5+1)^2 y^2 + m_6 x + m_7 y + 10 \,. \tag{1}$$

(a) Welche stationären Stellen hat die Funktion f auf $\mathbb{R}^2$?

(b) Hat f ein globales Minimum?

(c) Hat die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$g(x,y) = \exp\left(-f(x,y)^2\right)$$

mit f aus (1) ein globales Maximum?

(d) Hat g ein globales Minimum?

(e) Hat die Funktion $(x,y) \mapsto f(x,y) - (1 + m_3 m_4) x^2 y^2$ globale Extrema?

Aufgabe 2 (3+3 Punkte): Betrachte

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{|x|+|y|}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

und

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{|x|+|y|}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen und alle Richtungsableitungen $\partial_v f$ im Punkt $(0,0)$ mit $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Aufgabe 3: Berechnen Sie $\partial_x \partial_y f(0,0)$ und $\partial_y \partial_x f(0,0)$ für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

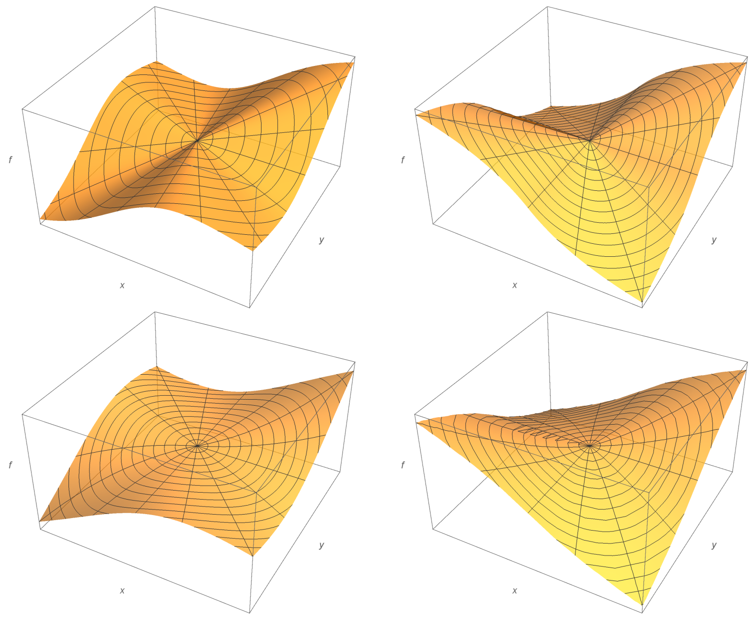
Aufgabe 4: Welche Vorschrift gehört zu welcher skizzierten Funktion?

$$f_1(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{|x|+|y|}}$$

$$f_2(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_3(x,y) = \frac{xy(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_4(x,y) = \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$$



Aufgabe 5 (3+3 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2)\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $g_{c,d}(x) := f(cx, dx)$ für alle $c, d \in \mathbb{R}$ ein lokales Minimum in 0 haben.

(b) Zeigen Sie, dass f kein lokales Minimum in 0 hat.

Aufgabe 6 (3 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in \mathbb{Q} \text{ oder } y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ partiell differenzierbar, aber nicht stetig ist.

Aufgabe 7: Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen. Wir definieren

$$h(x) := f(\exp(x), xg(x^2)).$$

(a) Zeigen Sie, dass h differenzierbar ist.

(b) Geben Sie eine Formel für die Ableitung $h'(x)$.

(c) Geben Sie Bedingungen an für f und g derart, dass h zweimal differenzierbar ist.