Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2017**
Jan Gerdung, M.Sc.

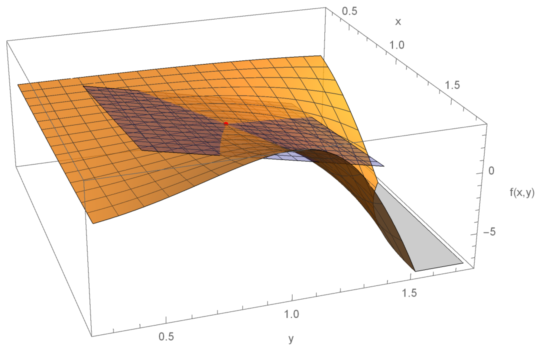
Analysis 2

Übungsblatt 9

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 2 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss am Donnerstag, den 29.06.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte): Betrachten sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = x\left(x^2 - y^4\right)\max\left(x, y^2\right).$$



(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Ist diese Funktion differenzierbar in $(1,1)$?

(c) Geben Sie wenn möglich, eine Vorschrift für die Tangentialebene an f in $(1,1)$.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte): Wir definieren

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\sqrt{y}x\right)}{\sqrt{y}x} & \text{wenn } x^2y > 0, \\ 1 & \text{wenn } x^2y = 0, \\ \frac{\sinh(\sqrt{-y}x)}{\sqrt{-y}x} & \text{wenn } x^2y < 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3: Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten

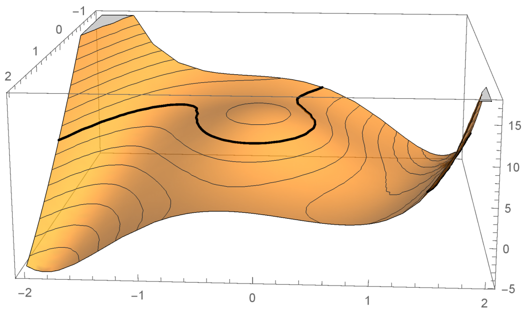
(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gibt es zu $x, y \in \mathbb{R}$ ein $\xi \in \{tx + (1-t)y \,;\, t \in [0,1]\}$, so dass
$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x).$$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Dann gibt es zu $x, y \in \mathbb{R}$ ein $\xi \in \{tx + (1-t)y \,;\, t \in [0,1]\}$, so dass
$$f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y - x).$$

(c) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gibt es zu $x, y \in \mathbb{R}^n$ ein $\xi \in \{tx + (1-t)y \,;\, t \in [0,1]\}$, so dass
$$f(y) - f(x) = \nabla f(\xi) \cdot (y - x).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve. Weiter beschreibe γ eine Niveaulinie von f, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f \circ \gamma(\mathbb{R}) = \{c\}$. Zeigen Sie, dass der Tangentialvektor dieser Kurve senkrecht auf dem Gradienten der Funktion steht:

$$\gamma'(t) \perp (\nabla f)(\gamma(t)).$$



Aufgabe 5: Seien $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ differenzierbare Funktionen.

(a) Beschreiben Sie die Ableitung von $(g \circ f)(x)$ mit den Ableitungen von g und f.

(b) Beschreiben Sie die Ableitung von $(f \circ g)(x, y)$ mit den Ableitungen von g und f.

(c) Beschreiben Sie die Ableitung von $(f \circ g)(x, -x^2)$ mit den Ableitungen von g und f.

Aufgabe 6 (2+2+2 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2y - xy^2$.

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix $H_f(x, y)$.

(b) Bestimmen Sie alle (x, y), für die $H_f(x, y)$ positiv definit ist.

(c) An welchen Stellen ist H_f indefinit?

Aufgabe 7: Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$. Bestimmen Sie alle stationären Punkte und Extrema von f.

Aufgabe 8: Wahr oder falsch?

(a) Wenn A und B positiv definit sind, dann ist auch $A + B$ positiv definit.

(b) Wenn A positiv definit und B negativ definit ist, dann kann $A + B$ nicht positiv definit sein.

(c) Wenn A positiv definit und B negativ definit ist, dann ist $A + B$ indefinit.

(d) Wenn A und B positiv definit sind, dann ist AB positiv definit.

(e) AA^T ist positiv definit.

(f) AA^T ist positiv semidefinit.