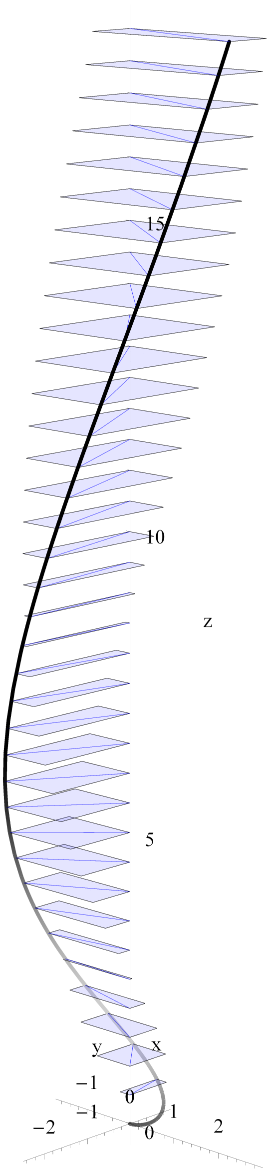
Klausur Analysis 2

19. Juli 2014

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Kurvenlänge von $x : [0,3] \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$x(t) = \begin{pmatrix} t\cos(2t) \\ t\sin(2t) \\ \frac{2}{3}t^3 \end{pmatrix}.$$

Rechts sehen Sie eine Skizze dieser Kurve.



Aufgabe 2: Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das Polynom $p(x,y) = x^2 + 2axy + a^3y^2$ ein Minimum in $(0,0)$?

Aufgabe 3: Berechnen Sie alle Lösungen $x : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ von

$$x'(t) = \frac{1 + x(t)}{1 + t}.$$

Aufgabe 4: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Wenn f differenzierbar ist in (a,b), dann ist f stetig in (a,b).
2. Wenn f stetig ist in (a,b), dann ist f differenzierbar in (a,b).

Aufgabe 5: Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \sqrt[3]{5x\left(x^2+y^2\right)}.$$

1. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
2. Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ für $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
3. Ist f differenzierbar in $(0,0)$?

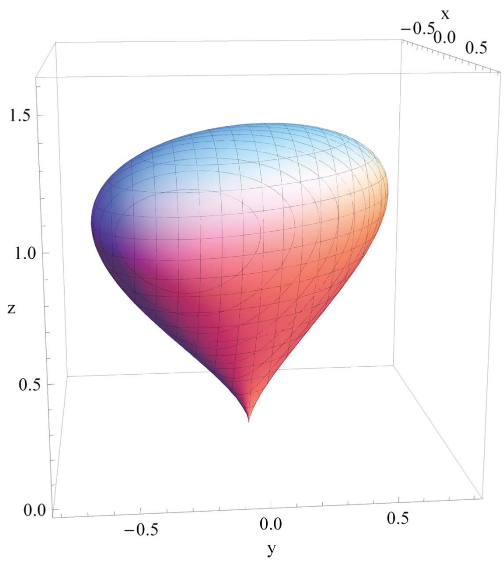
Aufgabe 6: Sei

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+xy+y^2+z^4-\tfrac{4}{3}z^3 = 0\right\}$$

Berechnen Sie die Extremstellen von $f : B \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y,z) = y.$$

Rechts sehen Sie ein Bild der Menge B.



Aufgabe 7: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $f(x,y) = (x+y^2, x^2+y)$, ist nach dem Satz über inverse Funktionen lokal invertierbar bei $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, mit Ausnahme der Stellen

$$\{(x_0,y_0);\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}.$$

Ergänzen Sie diese letzte Zeile und begründen Sie Ihre Antwort.

Lokal invertierbar bei (x_0,y_0) heißt, dass es eine Umgebung $B_\varepsilon(x_0,y_0)$ gibt derart, dass $f_{|B_\varepsilon(x_0,y_0)}$ invertierbar ist.

Aufgabe 8:

1. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Geben Sie die Definition von „A ist zusammenhängend“ an.
2. Ist die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ xy = 1\}$ zusammenhängend?