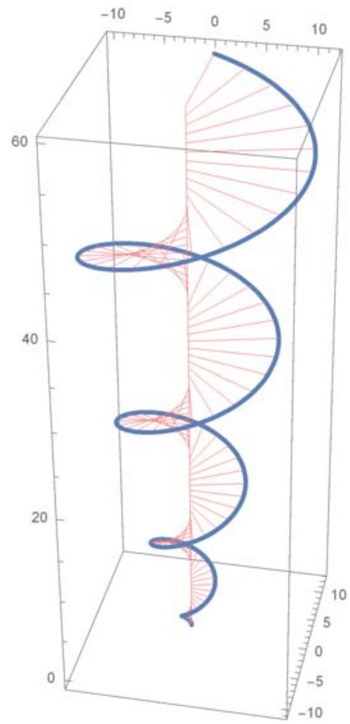
Name:

Aufgabe 1

(i) Wie definiert man die Kurvenlänge einer differenzierbaren Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$?

(ii) Berechnen Sie die Kurvenlänge von $f : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ für

$$f(t) = \begin{pmatrix} -t \sin(2t) \\ t \cos(2t) \\ \frac{4}{3} t^{3/2} \end{pmatrix}.$$



Name:

Aufgabe 2

(i) Wann heißt eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar in (a, b)?

(ii) Wann heißt eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$?

(iii) Geben Sie eine Formel für die Tangentialebene an einer stetig diferenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(iv) Sei $f(x, y) = e^x \sin(y)$ und geben sie die Vorschrift $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für die Tangentialebene $z = \ell(x, y)$ an f bei $(a, b) = (1, \pi)$.

NAME: AUFGABE 3

Berechnen Sie alle Lösungen von $y''(x) + y(x) = \sin(x)$.

NAME: AUFGABE 4

Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \dfrac{xy\,(x^2 - y^2)}{x^4 + y^4}$ für $(x,y) \neq (0,0)$?
Begründen Sie Ihre Antwort.

NAME: AUFGABE 5

(i) Sei $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ eine Matrix. Wie definiert man $\exp(A)$?

(ii) Richtig oder falsch?

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) \text{ für alle } A, B \in M^{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

NAME: AUFGABE 6

Setze $\overline{B_r(a,b)} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\right\}$. Ist die Menge

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_{2^{-n}}(2^{-n}, 2^{-n})}$$

(i) abgeschlossen?

(ii) zusammenhängend?

(iii) konvex?

Name: Aufgabe 7

Begründen Sie bei den folgenden Stellen, ob die Funktion $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ e^{x+y} \end{pmatrix},$$

lokal invertierbar ist:

(i) $(x,y) = (1,-1)$.

(ii) $(x,y) = (1,1)$;

Name: Aufgabe 8

Berechnen Sie den maximalen Wert von $f(x,y,z) = x+y+z$ auf

$$G = \left\{(x,y,z)\,;\, x^2+2y^2+4z^2 = 7\right\}.$$