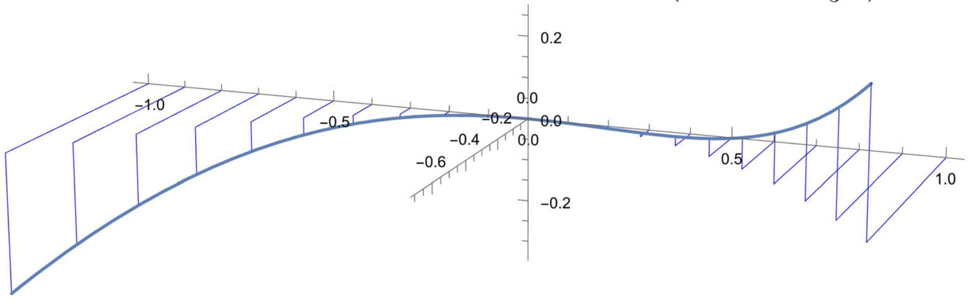
NAME: AUFGABE 1

Die Kurve K wird gegeben durch $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(t) = \left(t, -t^2/\sqrt{2}, \frac{1}{3}t^3\right)$.



(i) Berechnen Sie die Stelle auf der Kurve, wo $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ eine Tangentialrichtung ist.

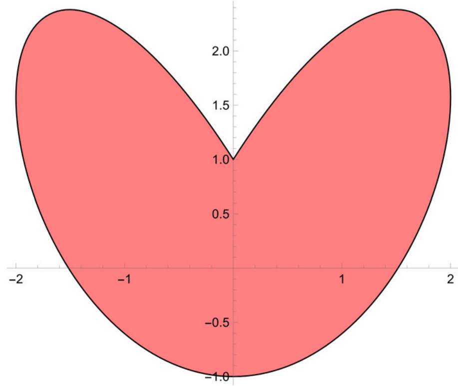
(ii) Schreiben Sie die Formel für die Bogenlänge dieser Kurve.

(iii) Berechnen Sie die Bogenlänge dieser Kurve.

NAME:	**AUFGABE 2**	

Wir betrachten die geschlossene Kurve $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(t) = \begin{pmatrix} 2\sin t \\ t\sin t - \cos t \end{pmatrix}$$



Rechts finden Sie ein Bild des umschlossenen Gebietes.

(i) Die Sektor-Formel von Leibniz für diese Kurve lautet:

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix} dt.$$

Bei dieser Kurve bekommt man so den Flächeninhalt des umschlossenen Gebietes. Gilt diese Formel für den Flächeninhalt bei jeder differenzierbaren, geschlossenen Kurve?

(ii) Erklären Sie den Faktor $\frac{1}{2}$ in der Formel.

(iii) Berechnen Sie den Flächeninhalt des umschlossenen Gebietes.

NAME:	**AUFGABE 3**	

Die Lösungen von

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \text{[illegible]} \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \tag{1}$$

werden beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{x} \text{[illegible]} e^{-7x} & \frac{3}{4}e^{x} - \frac{3}{4}e^{-7x} \\ \text{[illegible]} x & \frac{1}{4}e^{x} + \frac{3}{4}e^{-7x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Leider sind Tintenkleckse entstanden! Können Sie trotzdem die folgenden Fragen beantworten?

(i) Ist (1) ein stabiles System?

(ii) Würden Sie es Knoten, Strudel oder Sattelpunkt nennen?

(iii) Ergänzen Sie die verkleckste Stelle in (1).

(iv) Sei $\mathsf{A} \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$. Vereinfachen Sie $\exp(\mathsf{A}t)_{|t=0}$ und $\left(\frac{d}{dt}\exp(\mathsf{A}t)\right)_{|t=0}$.

(v) Ergänzen Sie die verkleckststen Stellen in (2).

Name:	Aufgabe 4	

Die stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x,y) = \frac{x\ y^2}{x^2+y^2} \quad \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0),$$

(i) Berechnen Sie $f(0,0)$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)$ und $\frac{\partial}{\partial y} f(0,0)$ existieren.

(iii) Ergänzen Sie: $\nabla f(0,0) =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ .

(iv) Berechnen Sie für $\boldsymbol{u} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ die Richtungsableitung $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}} f(0,0)$.

(v) Ist die Funktion f differenzierbar in $(0,0)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Name:	Aufgabe 5	

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x^2 + 2x + 2y + 2xy - y^2 + y^4$.

(i) Berechnen Sie die stationären Stellen.

(ii) Welche dieser Stellen ist ein Minimum? Begründen Sie Ihre Antwort.

NAME: AUFGABE 6

(i) Berechnen Sie die Stelle auf der Ebene $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 44\}$, bei der die Funktion $f : F \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ minimal wird.

(ii) Berechnen Sie die Stelle auf dem Ellipsoid $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 66\}$, bei der die Funktion $g : E \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y, z) = x + y + z$ maximal wird.

[2] In der Originalklausur war ein Tippfehler. Hier stand 3 statt 2. Die Bewertung wurde angepasst.