NAME: | **AUFGABE 1** |

1. (a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
   Wie definiert man „f ist differenzierbar"?

   Beweisen oder widerlegen Sie:

   (b) Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \|x\|$ ist differenzierbar.

   (c) Die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \cos(\|x\|)$ ist differenzierbar.
   Hinweis: Taylorpolynom vom Cosinus.

NAME:

AUFGABE 2

2. Wir betrachten die Kurve $x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$x(t) = \left((\cos t)^2 , \sqrt{2} \sin t \cos t, (\sin t)^2 \right).$$

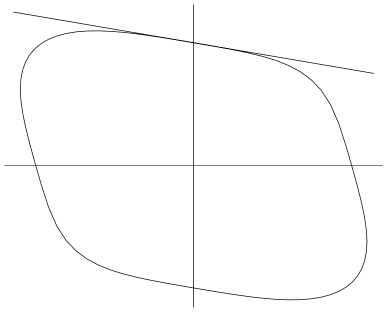
   (a) Berechnen Sie die Bogenlänge dieser Kurve.

   (b) Parametrisieren Sie um auf Bogenlänge.

   (c) Zeigen Sie, dass die Spur dieser Kurve in einer Ebene liegt.

Name:	Aufgabe 3	

3. Man betrachte die Tangente in $(0,1)$ an $G = \{(x,y)\,;\, x^4 + 2xy + 3y^4 = 3\}$. Wo schneidet diese Tangente die x-Achse?



Name: | Aufgabe 4

4. (a) Seien $G, H \subset \mathbb{R}^2$ kompakte und konvexe Gebiete. Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Funktion, die G ein-eindeutig abbildet auf H. Ausserdem sei $F^{inv} : H \to G$ stetig differenzierbar. Sei $\varphi : H \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ergänzen Sie:

$$\int_H \varphi(x,y)\, d(x,y) = \int_G \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad d(u,v).$$

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_K \left(1 - x^2 - y^2\right) d\,(x,y)$ für

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x+y \le 4 \text{ und } 0 \le y-x \le 2\right\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie neue Koordinaten u, v mit $u = x+y$ und $v = y-x$.

Name: Aufgabe 5

5. Sei $A \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ eine bestimmte Matrix. Für diese Matrix hat das folgende System von Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

die Lösungen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ 2e^t \sin 2t \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^t \sin 2t \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Dabei können x_0 und y_0 in $\mathbb{R}$ beliebig gewählt werden.

(a) Welche Stabilität hat dieses System? *(neutral stabil, asymptotisch stabil, instabil, ...)*

(b) Zu welchem Typ gehört dieses System? *(Knoten, Strudel, ...)*

(c) Welche Eigenwerte hat A?

(d) Berechnen Sie $\exp(tA)$.

(e) Schreiben wir $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Berechnen Sie a, b, c und d.

NAME:	**AUFGABE 6**	

6. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^4 + 2y^4 - x^2y^2 - y - 3x$$

hat genau ein Extremum, nämlich ein Minimum, und man möchte dieses Minimum approximieren. Ein angewandter Mathematiker benutzt das Newton-Verfahren, um einen Rechner zu programmieren, der dann die Zahlenpaare (x, y) und Werte $f(x, y)$ hier rechts liefert.

(x, y)	$f(x, y)$
$(1, 1)$	-2
$(0.990748,\ 0.677654)$	-2.7154
$(0.988040,\ 0.659279)$	-2.71686
$(0.987951,\ 0.658635)$	-2.71686
$(0.987951,\ 0.658634)$	-2.71686
$(0.987951,\ 0.658634)$	-2.71686
$\ldots$	$\ldots$

Geben Sie die Details eines Newton-Verfahrens zur Approximation des Minimums dieser Funktion f an.

Name:	Aufgabe 7	

7. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = e^{x-y} + 2x^2 + xy^3 - 6x - y^2$$

hat einen stationären Punkt in $(1, 1)$. Hat f dort ein Extremum? Wenn ja: Ist es ein Minimum oder ein Maximum? Ist es lokal oder global?

Name:	Aufgabe 8	

8. Entscheiden Sie bei folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, welche offen und welche abgeschlossen sind. Begründen Sie Ihre Aussagen.

   (a) $\emptyset$ (die leere Menge);

   (b) $\{(x, y)\,; 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;

   (c) $\{(x, 0)\,; 0 < x < 1\}$;

   (d) $\{(x, x)\,; x \in \mathbb{Q}\}$.

NAME: | AUFGABE 9

9. Das Taylorpolynom dritter Ordnung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = y\, e^{xy}$ in $(0,1)$ ist

$$t(x,y) = 1 + x + (y-1) + 2x\,(y-1) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\,(y-1) + x\,(y-1)^2\,.$$

(a) Geben Sie den Wert von $\left(\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial x} f\,(x,y)\right)_{|(x,y)=(0,1)}$ an.

(b) Geben Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f in $(0,1)$ an.

Name:	Aufgabe 10	

10. Benennen Sie den Typ und berechnen Sie alle Lösungen von

   (a) $u'(x) + xu(x) = x$.

   (b) $y'(t) = y(t)\,(1 - y(t))$.