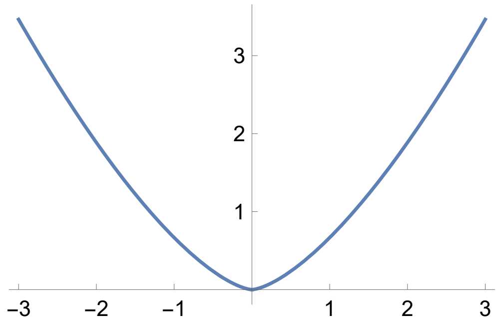
Name:

Aufgabe 1

Die Funktion $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $f(x) = \frac{2}{3}\,|x|^{3/2}$. Eine Skizze des Funktionsgraphen steht rechts.



(i) Geben Sie eine Parametrisierung des Funktionsgraphen.

(ii) Berechnen Sie die Bogenlänge dieses Funktionsgraphen.

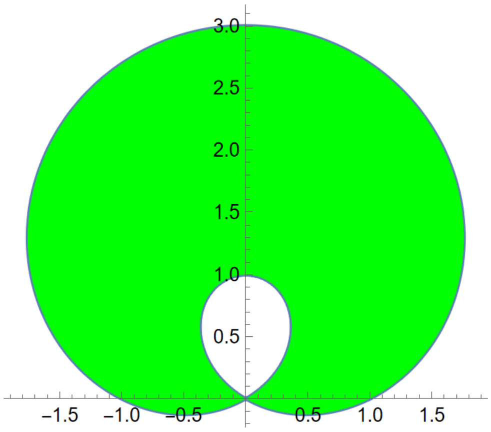
Name:

Aufgabe 2

Definiert ist eine Kurve $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\vec{x}(\varphi) = r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit $r(\varphi) = 1 + 2\sin(\varphi)$. Eine Skizze dieser Kurve steht rechts als der Rand des gefärbten Gebietes.



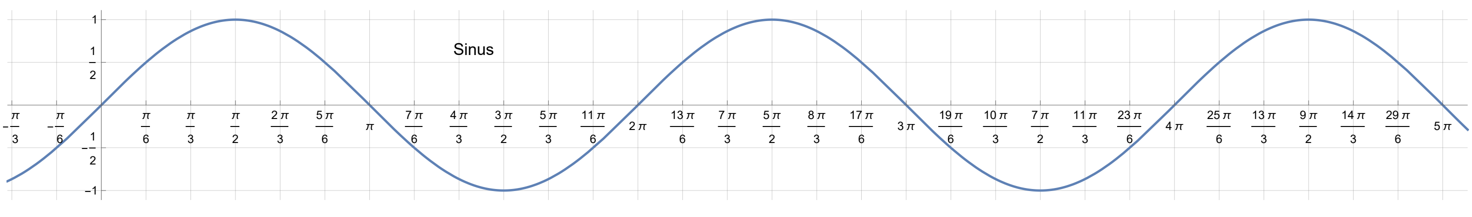
(i) Für welche $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

(ii) Geben Sie eine explizite Formel an für den Flächeninhalt des gefärbten Gebietes in der Skizze.

Hinweis: Wenn $\vec{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, gegeben in (1), eine differenzierbare, geschlossene Kurve ist, die einmal linksherum ein Gebiet umschließt, dann hat das eingeschlossene Gebiet den folgenden Flächeninhalt:

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b r(\varphi)^2 d\varphi.$$

(iii) Berechnen Sie den Flächeninhalt des gefärbten Gebietes. *Hinweis:* $\int_0^t (\sin s)^2 \, ds = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t)$.



Name: Aufgabe 3

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Wie sieht eine Jordanform zu dieser Matrix A aus?

(ii) Begründen Sie: für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \frac{(-2t)^n}{n!} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -2te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

(iii) Geben Sie das Resultat von $\exp(tA)$ an, ohne noch zu rechnen.

(iv) Geben Sie alle Lösungen an von $x'(t) = Ax(t)$.

NAME: | AUFGABE 4

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $f(x, y) = |x^2 - y^3|$.

(i) Zeigen Sie, dass f stetig ist auf $\mathbb{R}^2$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\nabla f(0, 0)$ existiert.

(iii) Ist die Funktion f differenzierbar in $(0, 0)$?

(iv) Existiert $\nabla f(1, 1)$?

Name:	Aufgabe 5	

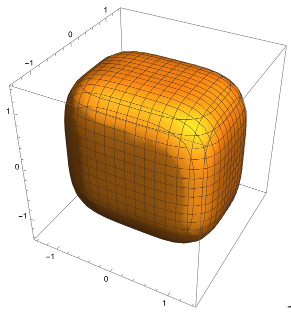
(i) Sei $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^4 + 4y^4 + z^4 = 3\}$.

Nimmt die Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = xyz$$

ihr Maximum auf E an?

Wenn ja, dann berechnen Sie dieses Maximum.



E

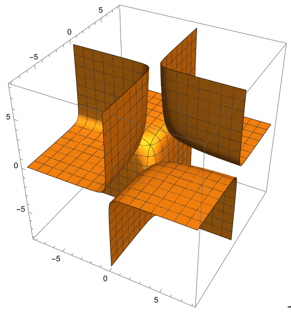
(ii) Sei $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; xyz = 1\}$.

Nimmt die Funktion $g : F \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y,z) = x^4 + 4y^4 + z^4$$

ihr Maximum auf F an?

Wenn ja, dann berechnen Sie dieses Maximum.



F

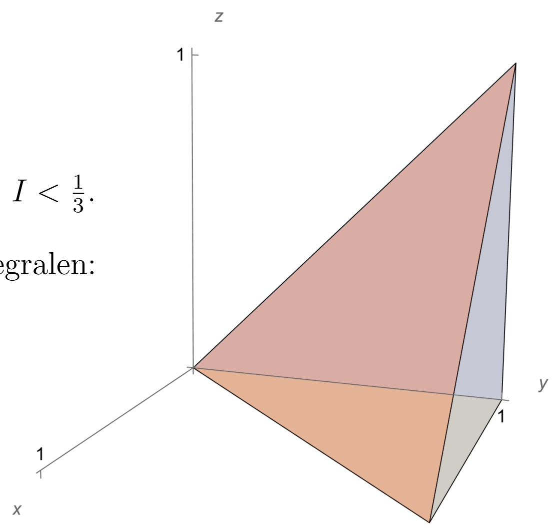
Name:	Aufgabe 6	

Gegeben ist das Gebiet $D = \{(x,y,z)\,;\, x,y,z \in (0,1) \text{ und } x+z<y\}$. Einige Daten:

> *D wird beschränkt durch ein Polyeder mit Ecken:* $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$ *und* $(0,1,1)$,
> *D hat Volumen* $=\frac{1}{6}$ *und gesamter Oberflächeninhalt* $=\frac{1}{2}\big(3+\sqrt{3}\big)$.

Wir möchten jedoch das folgende Integral berechnen:

$$I = \int_D (y+z)\, d(x,y,z).$$



(i) Zeigen Sie ohne das Integral explizit zu berechnen: $0 < I < \frac{1}{3}$.

(ii) Schreiben Sie das Integral mit 3 ein-dimensionalen Integralen:

$$I = \int_{z=\dots}^{\dots} \int_{y=\dots}^{\dots} \int_{x=\dots}^{\dots} (y+z)\, dxdydz.$$

(iii) Berechnen Sie $\displaystyle\int_D (y+z)\, d(x,y,z)$.