Prof. Dr. Guido Sweers
Dr. Aleksey Sikstel

SS 2023

Analysis 2

Übungsblatt 1

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 13.4., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1 (3 Punkte)**:** Für $x \in \mathbb{R}^3$ definieren wir $\|x\|_\infty := \max_{i\in\{1,2,3\}} |x_i|$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^3$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\quad \|x\|_\infty \le |x| \le 3\|x\|_\infty$.

Bemerkung: Seien $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ zwei Normen auf V. Wenn es $c_1, c_2 > 0$ gibt, so dass

$$c_1\|v\|_A \le \|v\| \le c_2\|v\|_B$$

für alle $v \in V$ gilt, so heissen die beiden Normen *äquivalent.*

Aufgabe 2 (3 Punkte)**:** Sei V ein Vektorraum und $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ eine Norm auf V. Zeigen Sie:

(a) Wenn $\|\cdot\|$ die Gleichung

minus

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad (*)$$

für alle $x, y \in V$ erfüllt, so definiert $\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 \cancel{+} \|x-y\|^2)$ ein inneres Produkt auf V und es gilt $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

(b) Gibt es ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, so dass $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ gilt, dann erfüllt $\|\cdot\|$ die Gleichung (*).

Aufgabe 3: Gegeben sei die Kurve $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t^3 - t,\, t^2 - 1)$.

(a) Skizzieren Sie die Spur.

(b) Die Kurve hat einen Doppelpunkt. Berechnen Sie den Winkel von den Tangentialrichtungen in diesem Doppelpunkt.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**:** Stimmt es, dass man bei der Neil'schen Parabel $f(t) = (t^3, t^2)$ die Länge zwischen $(-1, 1)$ und $(1, 1)$ mit $\int_{t=-1}^{t=1} t\sqrt{9t^2+4}dt$ berechnet? Berechnen sie die Länge.

Aufgabe 5: Sei $p \in (0, \infty)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Kurve $f:\ [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(t) = \left(\cos(t)|\cos(t)|^{\frac{2}{p}-1}, \sin(t)|\sin(t)|^{\frac{2}{p}-1}\right)$$

als Spur die Menge $S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x|^p + |y|^p = 1\right\}$ hat.

(b) Zeichnen Sie diese Spuren für $p = \frac{1}{2}$, $p = 1$ und $p = 3$.

Aufgabe 6 (1+2+2+3 Punkte)**:** Sei $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (e^{ct}\cos(t), e^{ct}\sin(t)).$$

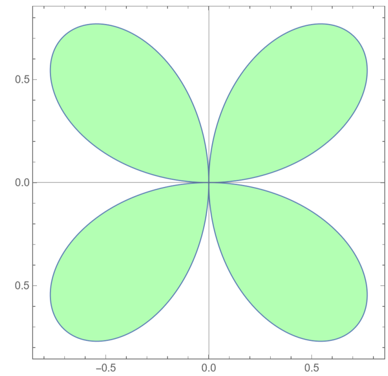
(a) Skizzieren Sie die Kurve für $c = \frac{1}{2\pi}$ im Bereich $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

(b) Für $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sei $l_{a,b}$ die Bogenlänge der Kurve $f\Big|_{[a,b]}$. Berechnen Sie $l_{a,b}$.

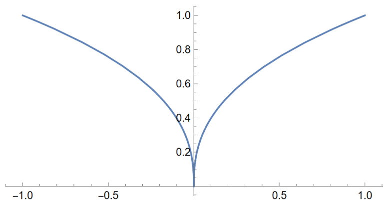
(c) Existiert $\lim_{a\to-\infty} l_{a,0}$?

(d) Zeigen Sie, dass f jeden Kreis um den Nullpunkt in genau einem Punkt schneidet und berechnen Sie den Cosinus des Schnittwinkels.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**:** Berechnen Sie die grüne Oberfläche. Das Gebiet wird umschlossen durch die folgende Kurve in Polarkoordinaten: $r(\phi) = |\sin(2\phi)|$.



Aufgabe 8: Die Kurve $f(t) = (t^5, t^2)$ zwischen $(-1, 1)$ und $(1, 1)$ sieht aus wie die Neilsche Parabel.



Wenn man die Länge mit Mathematica berechnet, bekommt man diese Antwort:

$$\texttt{2Hypergeometric2F1}\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{25}{4}\right]$$

Was soll diese Antwort? Geht das nicht anders?