Prof. Dr. Guido Sweers **SS 2023**
Dr. Aleksey Sikstel

Analysis 2

Übungsblatt 10

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist **Donnerstag, der 22.6., um 12:00** Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1 (3+1+2+2 Punkte)**:** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und untersuchen Sie, ob an diesen lokale Extrema vorlegen oder ob es sich um Sattelpunkte handelt.

(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f und skizzieren Sie diese.

(c) Begründen Sie, dass die Funktion f ihr Maximum und Minimum annimmt und bestimmen Sie alle Punkte, an denen dieses Maximum, bzw. dieses Minimum angenommen werden, zusammen mit den zugehörigen Funktionswerten.

(d) Skizzieren Sie die Niveaulinien der Funktion.

Aufgabe 2: Eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst konvex, falls

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, t \in [0,1] :\ u(tx + (1-t)y) \leq tu(x) + (1-t)u(y).$$

Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ und sei die Hesse-Matrix von u positiv definit in jedem Punkt im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass dann u konvex ist.

Aufgabe 3 (3+1+2 Punkte)**:** Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = 5x - 2x^2 - xy - y^2 - 11 \cancel{-3}.$$

(a) Zeigen Sie: Diese Funktion hat nur ein Extremum.

(b) Zeigen Sie, dass die Tangentialebene in $(2,1)$ an $z = f(x,y)$ durch $(0,0,0)$ geht.

(c) Berechnen Sie alle Stellen (a,b), bei der die Tangentialebene an $z = f(x,y)$ durch $(0,0,0)$ geht.

Aufgabe 4: Berechnen Sie alle stationären Stellen der Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und bestimmen Sie jeweils, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

(a) $f_1(x,y) = (x^2+2y^2)e^{-x^2-y^2}$

(b) $f_2(x,y) = x^2 - y^2$

(c) $f_3(x,y) = \cos(x)\cos(y)$

(d) $f_4(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Aufgabe 5 (3 Punkte)**:** Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sin(\pi x)\cos(\pi y)e^{x^2 y}$$

im Entwicklungspunkt $(1,1)$.

Aufgabe 6: Betrachten Sie das Polynom

$$f(x,y,z) = (x+z)y^2 + z^2 - 1.$$

Berechnen Sie die Taylorpolynome von Grad 1, 2, 3, 4 an der Stelle $(1,0,-1)$.

Aufgabe 7 (3 Punkte)**:** Berechnen Sie für den Multiindex $\alpha = (1,2,3)$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x_1,x_2,x_3) = \cos(3x_1 + 2x_2 + x_3)$$

die Ableitung $(\partial^\alpha f)(x_1,x_2,x_3)$

Aufgabe 8: Sei $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = m$. Für $\beta \in \mathbb{N}^n$ definieren wir

- $\beta \leq \alpha$ durch $\beta_k \leq \alpha_k$ für alle $k = 1,\ldots,n$ und
- $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$.

Weiter seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei m-mal stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta\leq\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!}(\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta} g).$$

Aufgabe 9: Sei $a = (-1,0)$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f(x,y) = x^3 e^y.$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom erster Ordnung bei a.

(b) Bestimmen Sie den Restterm von Lagrange $R_{1,a}(x,y)$.

(c) Bestimmen Sie für $b = (1,0)$ ein zugehöriges $\xi \in [a,b]$, sodass

$$R_{1,a}(b) = \frac{1}{2}((b-a)\cdot\nabla)^2 f(\xi).$$