Prof. Dr. Guido Sweers **SS 2023**
Dr. Aleksey Sikstel

Analysis 2

Übungsblatt 11

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist **Donnerstag, der 29.6., um 12:00** Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Wir betrachten das Polynom

$$p(x) = x^5 - x^4 - 12x^3 + 10$$

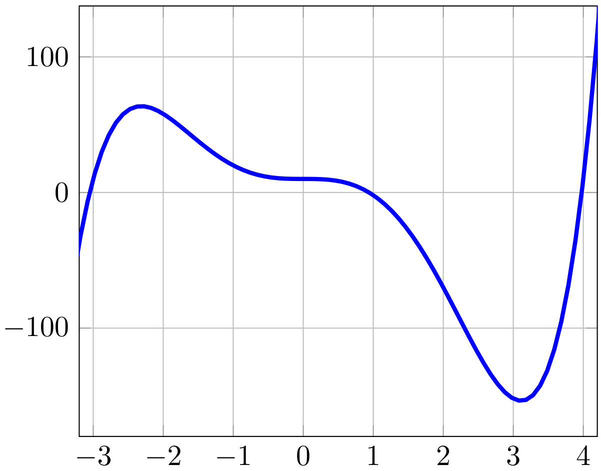
Das Polynom hat 3 Nullstellen.

(a) Wir führen das Newton-Verfahren mit dem Anfangswert $x_0 = 2$ durch. Formulieren Sie die Iterationsvorschrift und berechnen Sie x_1.

(b) Überlegen Sie sich mit Hilfe der Zeichnung, gegen welche Nullstelle das Newton-Verfahren konvergiert.

(c) Weshalb sollte man nicht den Startwert $x_0 = 0$ verwenden?

(d) Wie schnell konvergiert das Verfahren, wenn man einen beliebigen Startwert $x_0 \in [-2, 3] \setminus \{0\}$ wählt?



Aufgabe 2. Das Newton-Verfahren für $\arctan(x) = 0$ konvergiert nur, wenn der Startwert x_0 nahe bei 0 gewählt wird.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $a \in \mathbb{R}^+$ gibt derart, dass für $x_0 = a$ die Folge der Newton-Iterationen $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ periodisch ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $x_0 > a$ die Folge $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ divergiert.

(c) Zeigen Sie, dass für $x_0 \in (0, a)$ die Folge $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

(d) Geben Sie ein Verfahren an, dass a approximiert.

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie, dass für eine symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt, dass $\|M\| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$, wobei λ_1 und λ_2 die beiden Eigenwerte von M sind.

(b) Bestimmen Sie die Norm der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Wir wollen die Lösungen des folgenden Gleichungsystems mit Newton approximieren:

$$e^{x+y} = x - y, \quad x^4 + 4xy + y^4 = 0.$$

(a) Wie lautet die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren?

(b) Wieso sollte man $(-1, 1)$ nicht als Startwert wählen?

Aufgabe 5 (3+4 Punkte)**.** Die Lösungen des Gleichungssystems

$$y^2 + 2y + x = 4$$
$$x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} = \frac{33}{4}$$

sollen iterativ mit dem Newton–Verfahren für Systeme bestimmt werden.

(a) Formulieren Sie die Iterationsvorschrift.

(b) Führen Sie zwei Iterationen zu dem Startwert $(x_0, y_0) = (-2, 1)$ durch.

Aufgabe 6. Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren eine auf 3 Dezimalstellen genaue Approximation von $\sqrt{2}$.

Aufgabe 7. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass f genau dann eine Kontraktion ist, wenn es ein $\theta \in (0, 1)$ gibt, so dass $|f'(x)| \leq \theta$ auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 8 (0+2 Punkte)**.** Prüfen Sie, ob die jeweilige Funktion eine Kontraktion ist.

(a) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ mit $f(x) = \ln(x + 1) - x + 1$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = \left(\frac{x - y}{2} + 1, \frac{x + y}{2}\right)$

Aufgabe 9. Gegeben sei die Iterationsvorschrift $x_{n+1} = \ln(3 - x_n/2)$ mit dem Startwert $x_0 = 4$. Zeigen Sie mit dem Banach'schen Fixpunktsatz, dass die Iteration konvergiert.

Aufgabe 10 (3+2 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} x^3 - xy^2 \\ x^2 y - y^3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobimatrix von f und, wo sie existiert, ihre Inverse. Bestimmen Sie die Menge aller $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ an denen f lokal umkehrbar ist.

(b) An welchen Stellen ist die zugehörige Inverse, $(s, t) \mapsto \left(\frac{s}{\sqrt[3]{s^2 - t^2}}, \frac{t}{\sqrt[3]{s^2 - t^2}}\right)$, definiert?